CH09 : Réduction des endomorphismes - Aspects algébriques

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul et n un entier naturel non nul.

I Polynômes d'endomorphismes / de matrices

1) Polynômes d'endomorphismes

Notation
Classiquement, on notera la composition des endomorphismes de la façon suivante :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}},$$

avec la convention $u^0 = Id_E$.

Définition 1 (Valeur d'un polynôme en un endomorphisme)
Soit $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ *et soit* $u \in \mathcal{L}(E)$*. On appelle* **valeur de P en u** *l'endomorphisme :*

$$P(u) = \sum_{k=0}^{N} a_k u^k \in \mathcal{L}(E).$$

Propriété 2 (Morphisme d'algèbres d'évaluation)
Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$*, l'application* $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ *définie par* $\varphi_u(P) = P(u)$ *est un morphisme de* $\mathbb{K}$*-algèbres.*

Définition 3 (Polynôme en un endomorphisme)
Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$*. On dit que* v *est un polynôme en* u *s'il existe* $P \in \mathbb{K}[X]$ *tel que* $v = P(u)$*.*

Notation
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des polynômes en u :

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u),\ P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Propriété 4 (Structure algébrique des polynômes en u)
Pour $u \in \mathcal{L}(E)$*,* $\mathbb{K}[u]$ *est une sous-algèbre* **commutative** *de* $\mathcal{L}(E)$*.*
De plus, $\mathbb{K}[u]$ *est la plus petite sous-algèbre de* $\mathcal{L}(E)$ *contenant* u *(au sens de l'inclusion).*
On dit que $\mathbb{K}[u]$ *est* **l'algèbre engendrée par u***.*

Propriété 5 (Sous-espaces stables)
Si $P \in \mathbb{K}[X]$ *et* $u \in \mathcal{L}(E)$*, alors* $Ker(P(u))$ *et* $Im(P(u))$ *sont stables par* u*.*
On retrouve en particulier que les sous-espaces propres de u *(définis par* $E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda Id_E)$*, où* $\lambda \in Sp(u)$*) sont stables par* u*.*

2) Polynômes de matrices

Toutes les notions précédentes se transposent comme d'habitude aux matrices carrées.

Définition 6 (Valeur d'un polynôme en une matrice carrée)
Soit $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ *et soit* $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On appelle* **valeur de P en M** *la matrice carrée :*

$$P(M) = \sum_{k=0}^{N} a_k M^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Propriété 7 (Morphisme d'algèbres d'évaluation matricielle)
Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $\varphi_M : \mathbb{K}[X] \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\varphi_M(P) = P(M)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

Définition 8 (Polynôme en une matrice)
Soit $(A, M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que A est un polynôme en M s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = P(M)$.

Notation
Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathbb{K}[M]$ l'ensemble des polynômes en M :

$$\mathbb{K}[M] = \{P(M),\ P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Propriété 9 (Structure algébrique des polynômes en M)
Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[M]$ est une sous-algèbre **commutative** *de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
De plus, $\mathbb{K}[M]$ est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant M (au sens de l'inclusion).
On dit que $\mathbb{K}[M]$ est **l'algèbre engendrée par M**.

II Polynômes annulateurs, polynôme minimal

1) Définitions et premières propriétés

Définition 10 (Polynôme annulateur d'un endomorphisme, d'une matrice)
On appelle **polynôme annulateur** *de $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (resp. $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$).*

Propriété 11 (Polynômes annulateurs de deux matrices semblables)
Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possèdent les mêmes polynômes annulateurs.

Propriété 12 (Structure algébrique des polynômes annulateurs)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, l'ensemble des polynômes annulateurs de u est un sous-espace vectoriel et un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Propriété 13 (Polynôme annulateur et valeur propre)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.
Pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(u(x) = \lambda x \implies P(u)(x) = P(\lambda)x)$.
En particulier, si λ est valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

Théorème 14 (Valeurs propres et racines des polynômes annulateurs)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, les valeurs propres de u figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur de u, i.e. $(P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \implies \forall \lambda \in Sp(u),\ P(\lambda) = 0_{\mathbb{K}})$.

2) Résultats en dimension finie

Dans cette section, on va examiner ce qui se passe lorsque E est de dimension finie.

Théorème 15 (Théorème de Cayley-Hamilton)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Théorème 16 (Existence et unicité du polynôme minimal)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique polynôme $\pi_u \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant :

- *(i) π_u est annulateur de u ;*
- *(ii) π_u est unitaire ;*
- *(iii) $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $(P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \implies \pi_u$ divise $P)$.*

Ce polynôme π_u est appelé **polynôme minimal** *de l'endomorphime u.*

Propriété 17 (Valeurs propres et polynôme minimal)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Les valeurs propres de u sont exactement les racines dans $\mathbb{K}$ de son polynome minimal π_u.

3) Puissances d'un endomorphisme

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode
On peut calculer les puissances d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (ou d'une matrice carrée A) directement à partir de son polynôme minimal, par division euclidienne.

Plus généralement, on dispose du résultat suivant :

Propriété 18 (Base des polynômes en u)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Si $d = \deg(\pi_u)$, alors la famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. En particulier $\dim(\mathbb{K}[u]) = d \leq n = \dim(E)$.

III Réduction et polynômes annulateurs

1) Lemme des noyaux

Théorème 19 (Lemme de décomposition des noyaux)
Si $P_1, \cdots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux, alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$Ker\left(\left(\prod_{k=1}^{m} P_k\right)(u)\right) = \bigoplus_{k=1}^{m} Ker(P_k(u)).$$

Corollaire 20 (Version matricielle du lemme des noyaux)
Si $P_1, \cdots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux, alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$Ker\left(\left(\prod_{k=1}^{m} P_k\right)(A)\right) = \bigoplus_{k=1}^{m} Ker(P_k(A)).$$

2) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Théorème 21 (CNS de diagonalisabilité)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.
Alors, il y a équivalence entre :

(*i*) *u est diagonalisable ;*

(*ii*) *Il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$ qui est annulateur de u ;*

(*iii*) *Le polynôme minimal π_u est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$*

Dans ce cas, le polynôme minimal de u est

$$\pi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda).$$

Lemme 22 (Endomorphisme induit par $P(u)$)
Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, F est stable par $P(u)$ et $P(u)_F = P(u_F)$.

Propriété 23 (Polynôme minimal d'un endomorphisme induit)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie.
Si F est un sev non nul de E stable par u, alors le polynôme minimal de u_F (l'endomorphisme induit) divise le polynôme minimal de u.

Théorème 24 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie. Si u est diagonalisable et si F est un sev non nul de E stable par u, alors l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable.

Corollaire 25 (Propriétés des sev stables par un endomorphisme diagonalisable)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable (avec E de dimension finie), et soit F un sev de E non nul. Alors F est stable par u si et seulement si F possède une base formée de vecteurs propres de u.

3) Trigonalisabilité et polynômes annulateurs

Dans la suite, on fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Théorème 26 (CNS de trigonalisabilité)
Il y a équivalence entre :

(*i*) *u est trigonalisable ;*

(*ii*) *Il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur $\mathbb{K}$ qui est annulateur de u ;*

(*iii*) *Le polynôme minimal π_u est scindé sur $\mathbb{K}$.*

(*iv*) *Le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.*

Corollaire 27 (Trigonalisabilité d'un endomorphisme induit)
Si u est trigonalisable et si F est un sev non nul de E stable par u, alors l'endomorphisme induit u_F est trigonalisable.

Le théorème précédent ne dit pas **comment** trigonaliser explicitement. On dispose d'outils plus précis.

Définition 28 (Sous-espaces caractéristiques)
On suppose χ_u scindé sur $\mathbb{K}$.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u, de multiplicité $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$, alors on appelle **sous-espace caractéristique de** u **associé à** λ *le sous-espace vectoriel*

$$N_\lambda(u) = Ker((u - \lambda Id_E)^{\alpha_\lambda}).$$

Ce sev est stable par u (car de la forme $Ker(P(u))$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$).

Théorème 29 (Propriétés des sous-espaces caractéristiques)
Avec les notations précédentes, on a

(i) *Les sous-espaces caractéristiques sont supplémentaires dans E :*

$$E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} N_\lambda(u).$$

(ii) *Leur dimension est la multiplicité de la valeur propre correspondante :*

$$\forall \lambda \in Sp(u), \qquad \dim(N_\lambda(u)) = \alpha_\lambda.$$

(iii) *On peut les voir de deux manières :*

$$\forall \lambda \in Sp(u), \qquad N_\lambda(u) = Ker((u - \lambda Id_E)^{\alpha_\lambda}) = Ker((u - \lambda Id_E)^{\beta_\lambda}),$$

où β_λ est la multiplicité de la racine λ dans le polynôme minimal π_u (alors que α_λ est celle dans le polynôme caractéristique χ_u).

Théorème 30 (Réduction diagonale par blocs)
Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$, alors il existe une base de E dans laquelle $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_m \end{pmatrix},$$

chaque bloc diagonal étant de la forme

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * & * \\ 0 & \lambda_i & * & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{K}),$$

où α_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i.

Corollaire 31 (Réduction matricielle diagonale par blocs)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ alors A est semblable à une matrice diagonale par blocs, où chaque bloc diagonal est de la forme $\lambda I + N$ avec $\lambda \in Sp(A)$ et N triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale (donc nilpotente).