

CH09 : Réduction des endomorphismes - Aspects algébriques

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne un sous-corps de \mathbb{C} , E un \mathbb{K} -espace vectoriel non nul et n un entier naturel non nul.

I Polynômes d'endomorphismes / de matrices

1) Polynômes d'endomorphismes

Notation

Classiquement, on notera la composition des endomorphismes de la façon suivante :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$$

avec la convention $u^0 = Id_E$.

Définition 1 (Valeur d'un polynôme en un endomorphisme)

Soit $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **valeur de P en u** l'endomorphisme :

$$P(u) = \sum_{k=0}^N a_k u^k \in \mathcal{L}(E).$$

Propriété 2 (Morphisme d'algèbres d'évaluation)

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application $\varphi_u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi_u(P) = P(u)$ est un morphisme de \mathbb{K} -algèbres.

Définition 3 (Polynôme en un endomorphisme)

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. On dit que v est un **polynôme en u** s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$.

Notation

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $\mathbb{K}[u]$ l'ensemble des polynômes en u :

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u), P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Propriété 4 (Structure algébrique des polynômes en u)

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathbb{K}[u]$ est une sous-algèbre **commutative** de $\mathcal{L}(E)$.

De plus, $\mathbb{K}[u]$ est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ contenant u (au sens de l'inclusion).

On dit que $\mathbb{K}[u]$ est l'**algèbre engendrée par u** .

Propriété 5 (Sous-espaces stables)

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Im}(P(u))$ sont stables par u .

On retrouve en particulier que les sous-espaces propres de u (définis par $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda Id_E)$, où $\lambda \in \text{Sp}(u)$) sont stables par u .

2) Polynômes de matrices

Toutes les notions précédentes se transposent comme d'habitude aux matrices carrées.

Définition 6 (Valeur d'un polynôme en une matrice carrée)

Soit $P = \sum_{k=0}^N a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **valeur de P en M** la matrice carrée :

$$P(M) = \sum_{k=0}^N a_k M^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Propriété 7 (Morphisme d'algèbres d'évaluation matricielle)

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $\varphi_M : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\varphi_M(P) = P(M)$ est un morphisme de \mathbb{K} -algèbres.

Définition 8 (Polynôme en une matrice)

Soit $(A, M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. On dit que A est un polynôme en M s'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = P(M)$.

Notation

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathbb{K}[M]$ l'ensemble des polynômes en M :

$$\mathbb{K}[M] = \{P(M), P \in \mathbb{K}[X]\}.$$

Propriété 9 (Structure algébrique des polynômes en M)

Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[M]$ est une sous-algèbre **commutative** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus, $\mathbb{K}[M]$ est la plus petite sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contenant M (au sens de l'inclusion).

On dit que $\mathbb{K}[M]$ est l'**algèbre engendrée par M** .

II Polynômes annulateurs, polynôme minimal

1) Définitions et premières propriétés

Définition 10 (Polynôme annulateur d'un endomorphisme, d'une matrice)

On appelle **polynôme annulateur** de $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ (resp. $P(M) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$).

Propriété 11 (Polynômes annulateurs de deux matrices semblables)

Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possèdent les mêmes polynômes annulateurs.

Propriété 12 (Structure algébrique des polynômes annulateurs)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, l'ensemble des polynômes annulateurs de u est un sous-espace vectoriel et un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

Propriété 13 (Polynôme annulateur et valeur propre)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $(u(x) = \lambda x \implies P(u)(x) = P(\lambda)x)$.

En particulier, si λ est valeur propre de u , alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.

Théorème 14 (Valeurs propres et racines des polynômes annulateurs)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, les valeurs propres de u figurent parmi les racines de tout polynôme annulateur de u , i.e. $(P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \implies \forall \lambda \in Sp(u), P(\lambda) = 0_{\mathbb{K}})$.

2) Résultats en dimension finie

Dans cette section, on va examiner ce qui se passe lorsque E est de dimension finie.

Théorème 15 (Théorème de Cayley-Hamilton)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Théorème 16 (Existence et unicité du polynôme minimal)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique polynôme $\pi_u \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant :

- (i) π_u est annulateur de u ;
- (ii) π_u est unitaire ;
- (iii) $\forall P \in \mathbb{K}[X], (P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)} \implies \pi_u \text{ divise } P)$.

Ce polynôme π_u est appelé **polynôme minimal** de l'endomorphisme u .

Propriété 17 (Valeurs propres et polynôme minimal)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Les valeurs propres de u sont exactement les racines dans \mathbb{K} de son polynôme minimal π_u .

3) Puissances d'un endomorphisme

E désigne toujours un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Méthode

On peut calculer les puissances d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (ou d'une matrice carrée A) directement à partir de son polynôme minimal, par division euclidienne.

Plus généralement, on dispose du résultat suivant :

Propriété 18 (Base des polynômes en u)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Si $d = \deg(\pi_u)$, alors la famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. En particulier $\dim(\mathbb{K}[u]) = d \leq n = \dim(E)$.

III Réduction et polynômes annulateurs

1) Lemme des noyaux

Théorème 19 (Lemme de décomposition des noyaux)

Si $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux, alors pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$:

$$\text{Ker} \left(\left(\prod_{k=1}^m P_k \right) (u) \right) = \bigoplus_{k=1}^m \text{Ker}(P_k(u)).$$

Corollaire 20 (Version matricielle du lemme des noyaux)

Si $P_1, \dots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux deux à deux, alors pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\text{Ker} \left(\left(\prod_{k=1}^m P_k \right) (A) \right) = \bigoplus_{k=1}^m \text{Ker}(P_k(A)).$$

2) Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Théorème 21 (CNS de diagonalisabilité)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie.

Alors, il y a équivalence entre :

- (i) u est diagonalisable ;
- (ii) Il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples sur \mathbb{K} qui est annulateur de u ;
- (iii) Le polynôme minimal π_u est scindé à racines simples sur \mathbb{K}

Dans ce cas, le polynôme minimal de u est

$$\pi_u = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda).$$

Lemme 22 (Endomorphisme induit par $P(u)$)

Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, F est stable par $P(u)$ et $P(u)_F = P(u_F)$.

Propriété 23 (Polynôme minimal d'un endomorphisme induit)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie.

Si F est un sev non nul de E stable par u , alors le polynôme minimal de u_F (l'endomorphisme induit) divise le polynôme minimal de u .

Théorème 24 (Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie. Si u est diagonalisable et si F est un sev non nul de E stable par u , alors l'endomorphisme induit u_F est diagonalisable.

Corollaire 25 (Propriétés des sev stables par un endomorphisme diagonalisable)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable (avec E de dimension finie), et soit F un sev de E non nul. Alors F est stable par u si et seulement si F possède une base formée de vecteurs propres de u .

3) Trigonalisabilité et polynômes annulateurs

Dans la suite, on fixe E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Théorème 26 (CNS de trigonalisabilité)

Il y a équivalence entre :

- (i) u est trigonalisable ;
- (ii) Il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé sur \mathbb{K} qui est annulateur de u ;
- (iii) Le polynôme minimal π_u est scindé sur \mathbb{K} .
- (iv) Le polynôme caractéristique χ_u est scindé sur \mathbb{K} .

Corollaire 27 (Trigonalisabilité d'un endomorphisme induit)

Si u est trigonalisable et si F est un sev non nul de E stable par u , alors l'endomorphisme induit u_F est trigonalisable.

Le théorème précédent ne dit pas **comment** trigonaliser explicitement. On dispose d'outils plus précis.

Définition 28 (Sous-espaces caractéristiques)

On suppose χ_u scindé sur \mathbb{K} .

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u , de multiplicité $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$, alors on appelle **sous-espace caractéristique de u associé à λ** le sous-espace vectoriel

$$N_\lambda(u) = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{\alpha_\lambda}).$$

Ce sev est stable par u (car de la forme $\text{Ker}(P(u))$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$).

Théorème 29 (Propriétés des sous-espaces caractéristiques)

Avec les notations précédentes, on a

(i) Les sous-espaces caractéristiques sont supplémentaires dans E :

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} N_\lambda(u).$$

(ii) Leur dimension est la multiplicité de la valeur propre correspondante :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad \dim(N_\lambda(u)) = \alpha_\lambda.$$

(iii) On peut les voir de deux manières :

$$\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \quad N_\lambda(u) = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{\alpha_\lambda}) = \text{Ker}((u - \lambda \text{Id}_E)^{\beta_\lambda}),$$

où β_λ est la multiplicité de la racine λ dans le polynôme minimal π_u (alors que α_λ est celle dans le polynôme caractéristique χ_u).

Théorème 30 (Réduction diagonale par blocs)

Si χ_u est scindé sur \mathbb{K} , de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, alors il existe une base de E dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale par blocs :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_m \end{pmatrix},$$

chaque bloc diagonal étant de la forme

$$A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & * & \cdots & * & * \\ 0 & \lambda_i & * & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_i & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{\alpha_i}(\mathbb{K}),$$

où α_i est la multiplicité de la valeur propre λ_i .

Corollaire 31 (Réduction matricielle diagonale par blocs)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Si χ_A est scindé sur \mathbb{K} alors A est semblable à une matrice diagonale par blocs, où chaque bloc diagonal est de la forme $\lambda I + N$ avec $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et N triangulaire supérieure avec des zéros sur la diagonale (donc nilpotente).