

# CH08 : Réduction des endomorphismes - aspects géométriques

Dans tout ce cours,  $\mathbb{K}$  désigne un sous-corps de  $\mathbb{C}$  (un tel corps contient nécessairement  $\mathbb{Q}$ , et on aura très souvent  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul.

Etant donné un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on peut se demander (lorsque  $E$  est de dimension finie) s'il existe une base de  $E$  dans laquelle  $u$  se représente par une matrice "simple", par exemple diagonale, ou triangulaire, ou diagonale par blocs. La détermination d'une telle base est appelée la **réduction** de l'endomorphisme  $u$ .

## I Sous-espaces stables par un endomorphisme

### 1) Définition

#### Définition 1 (Sous-espace stable par un endomorphisme)

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On dit que  $F$  est stable par  $u$  lorsque  $u(F) \subset F$ , c'est-à-dire  $(x \in F \implies u(x) \in F)$ .

#### Définition 2 (Endomorphisme induit sur un sous-espace stable)

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ .

Alors, l'application  $u_F : \begin{cases} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{cases}$  est bien définie et c'est un endomorphisme de  $F$ .

On dit que  $u_F$  est l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ .

### 2) Matrice dans une base adaptée à un sous-espace stable

#### Propriété 3 (Traduction matricielle d'un sous-espace stable)

On suppose  $E$  de dimension finie, notée  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On considère  $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_k)$  une base de  $F$  que l'on complète en une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ .

Alors,  $F$  est stable par  $u$  si et seulement si la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme suivante :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

avec  $A_1 \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ . Dans ce cas,  $A_1$  est la matrice de  $u_F$  dans la base  $\mathcal{B}_F$ .

## II Éléments propres d'un endomorphisme

Dans la suite, on fixe un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

### 1) Vecteurs propres, valeurs propres

#### Définition 4 (Vecteurs propres, valeurs propres)

- (i) On dit que  $x \in E$  est un **vecteur propre** de  $u$  lorsque  $x \neq 0_E$  et  $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $u(x) = \lambda x$  (i.e.  $x$  est non nul et  $u(x)$  est colinéaire à  $x$ ).
- (ii) On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de  $u$  lorsqu'il existe  $x \in E$  tel que  $x \neq 0_E$  et  $u(x) = \lambda x$ .

#### Vocabulaire

Lorsque  $u(x) = \lambda x$  avec  $x$  non nul, on dit que  $(\lambda, x)$  est un **couple valeur propre/vecteur propre**.

On dit aussi que  $x$  et  $\lambda$  sont **associés**.

L'équation  $u(x) = \lambda x$ , d'inconnue  $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times (E \setminus \{0\})$ , est appelée **équation aux éléments propres** de  $u$ .

#### Propriété 5 (Caractérisation des valeurs propres)

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } u &\iff \text{Ker}(u - \lambda Id_E) \neq \{0_E\} \\ &\iff u - \lambda Id_E \text{ non injective.} \end{aligned}$$

Dans ce cas, les vecteurs propres associés à  $\lambda$  sont les éléments non nuls de  $\text{Ker}(u - \lambda Id_E)$ .

#### Propriété 6 (Vecteur propre et droite stable)

Soit  $x \in E$  un vecteur non nul. On a l'équivalence :

$$x \text{ est vecteur propre de } u \iff \text{la droite } \mathcal{D} = \text{Vect}(x) \text{ est stable par } u.$$

### 2) Sous-espaces propres

#### Définition 7 (Sous-espace propre d'un endomorphisme)

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On appelle **sous-espace propre associé à  $\lambda$**  l'ensemble  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda Id_E)$ .

C'est un sous-espace vectoriel non nul de  $E$ .

#### Théorème 8 (Indépendance linéaire des sous-espaces propres)

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$  (avec  $p \geq 2$ ) des valeurs propres **distinctes** de  $u$ . Alors :

- (i) les sous-espaces propres  $E_{\lambda_i}(u)$  sont en somme directe, i.e. :

$$\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u);$$

- (ii) si  $x_1, \dots, x_p$  sont des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ , alors la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre.

#### Théorème 9 (Stabilité d'un sous-espace propre)

Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent :  $u \circ v = v \circ u$ .

Alors, tout sous-espace propre de  $u$  est stable par  $v$ .

En particulier, tout sous-espace propre de  $u$  est stable par  $u$ .

### 3) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

En dimension finie, on dispose d'une caractérisation simple des valeurs propres, grâce au déterminant. Dans toute la suite, **on suppose que  $E$  est de dimension finie**, et on note

$$n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*.$$

$u$  désigne toujours un endomorphisme de  $E$ .

**Propriété 10 (Caractérisation des valeurs propres à l'aide du det)**

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors on a l'équivalence :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } u \iff \det(\lambda Id_E - u) = 0.$$

**Propriété 11 (Structure polynomiale de  $\det(\lambda Id_E - u)$ )**

La fonction  $\lambda \mapsto \det(\lambda Id_E - u)$  est polynomiale de degré  $n = \dim(E)$ , avec

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \det(\lambda Id_E - u) = \lambda^n - \text{tr}(u)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u).$$

**Définition 12 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme)**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle **polynôme caractéristique** de  $u$  le polynôme :

$$\chi_u(X) = \det(X Id_E - u) \in \mathbb{K}[X].$$

On dispose alors du théorème suivant :

**Théorème 13 (Interprétation des valeurs propres comme racines)**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , avec  $E$  de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- (i) Les valeurs propres de  $u$  sont exactement les racines dans  $\mathbb{K}$  de son polynôme caractéristique :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda \text{ valeur propre de } u \iff \chi_u(\lambda) = 0).$$

- (ii)  $u$  possède au plus  $n$  valeurs propres.

**Définition 14 (Spectre d'un endomorphisme)**

On appellera **spectre de  $u$**  (noté  $Sp(u)$ ) l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{K}$  qui sont valeurs propres de  $u$ .

#### 4) Éléments propres d'une matrice carrée

$n$  désigne toujours un entier naturel non nul.

Par simplicité, les vecteurs colonnes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  seront identifiés aux vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ .

**Définition 15 (Valeur/vecteur propre d'une matrice carrée)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre de  $A$**  lorsque  $\lambda$  est une valeur propre de l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  :

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ V & \longmapsto & AV \end{cases}.$$

Tout vecteur colonne  $V$  tel que  $V \neq 0_{\mathbb{K}^n}$  et  $AV = \lambda V$  est alors appelé **vecteur propre** de la matrice  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

**Définition 16 (Sous-espaces propres d'une matrice carrée)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $A$ . On appelle **sous-espace propre de  $A$  associé à  $\lambda$**  le sous-espace vectoriel  $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ .

**Définition 17 (Polynôme caractéristique d'une matrice carrée)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle **polynôme caractéristique de  $A$**  le polynôme :

$$\chi_A(X) = \det(X I_n - A) \in \mathbb{K}[X].$$

**Définition 18 (Spectre d'une matrice carrée)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle **spectre de  $A$**  (noté  $Sp(A)$ ) l'ensemble des valeurs propres de  $A$ . C'est une partie finie de  $\mathbb{K}$  (les racines de  $\chi_A$ ), de cardinal compris entre 0 et  $n$ .

**Propriété 19 (Valeurs propres d'une matrice triangulaire)**

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux.

**Propriété 20 (Des matrices semblables ont même poly. caractéristique)**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors  $\chi_A(X) = \chi_B(X)$ .

## 5) Multiplicité d'une valeur propre

### Définition 21 (Multiplicité d'une valeur propre)

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle **multiplicité de la valeur propre  $\lambda$**  sa multiplicité en tant que racine de  $\chi_u(X)$ , c'est-à-dire le plus grand entier  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $(X - \lambda)^k$  divise  $\chi_u(X)$ .

### Propriété 22 (Forme du polynôme caractéristique sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ )

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $\chi_u$  est scindé, c'est-à-dire de la forme :

$$\chi_u(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

où  $1 \leq p \leq n$ , les  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  sont les valeurs propres distinctes de  $u$ , et les  $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$  leurs multiplicités respectives.

### Théorème 23 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sev non nul de  $E$  stable par  $u$ .

Alors  $\chi_{u_F}(X)$  divise  $\chi_u(X)$ .

On en déduit un lien entre la multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé :

### Théorème 24 (Lien entre multiplicité de $\lambda$ et dimension de $E_\lambda(u)$ )

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $u \in \mathcal{L}(E)$  de multiplicité  $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$ . Alors, on a

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq \alpha_\lambda,$$

où  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$  est le sous-espace propre de  $u$  associé à  $\lambda$ .

### III Endomorphismes/matrices diagonalisables

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On s'intéresse au problème suivant : existe-t-il une base  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale ?

#### 1) Définition

##### Définition 25 (Endomorphisme diagonalisable)

On dit que  $u$  est **diagonalisable** lorsqu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

##### Propriété 26 (Définition équivalente d'un endomorphisme diagonalisable)

$u$  est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

##### Vocabulaire

Si  $u$  est diagonalisable, **diagonaliser** l'endomorphisme  $u$  signifie trouver une telle base de vecteurs propres, appelée aussi **base de diagonalisation** de  $u$ .

On définit naturellement une notion analogue sur les matrices carrées :

##### Définition 27 (Matrice diagonalisable)

Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est dite **diagonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire lorsqu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

##### Vocabulaire

Dans ce cas, **diagonaliser** la matrice  $A$ , c'est déterminer une matrice inversible  $P$  telle que la matrice  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

#### 2) Théorème de diagonalisation

De manière générale, on dispose d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme (ou une matrice) soit diagonalisable.

##### Théorème 28 (Caractérisation des endomorphismes diagonalisables)

$u$  est diagonalisable si et seulement si  $\left( Sp(u) \neq \emptyset \text{ et } \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) = E \right)$ .

Dans ce cas, on a

$$\chi_u(X) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)^{\dim(E_\lambda(u))}$$

(chaque valeur propre a une multiplicité égale à la dimension du sous-espace propre associé).

On déduit de la proposition précédente le théorème suivant :

**Théorème 29 (Théorème de diagonalisation)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On note  $\chi_u(X) = \det(XId_E - u)$  son polynôme caractéristique.

(i) Si  $\chi_u$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors  $u$  n'est pas diagonalisable.

(ii) Si  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors en notant  $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$  (avec les  $\lambda_k$  deux à deux distincts et les  $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$ ), on a les équivalences :

$$\begin{aligned} u \text{ est diagonalisable} &\iff E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u) = E \\ &\iff \sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k}(u)) = n \\ &\iff \forall k \in [1; p], \dim(E_{\lambda_k}(u)) = \alpha_k \end{aligned} .$$

Dans ce cas, on obtient une base de diagonalisation de  $u$  en concaténant des bases des sous-espaces propres.

**3) Cas des projecteurs et symétries****Propriété 30 (Diagonalisabilité des projecteurs et symétries)**

(i) Tout projecteur  $p : E \rightarrow E$  est diagonalisable.

De plus, si  $p \notin \{0_{\mathcal{L}(E)}, Id_E\}$ , alors  $p$  possède exactement deux sous-espaces propres :

$$E_0(p) = \text{Ker}(p) \text{ et } E_1(p) = \text{Ker}(p - Id_E) = \text{Im}(p).$$

(ii) Toute symétrie  $s : E \rightarrow E$  est diagonalisable.

De plus, si  $s \notin \{Id_E, -Id_E\}$ , alors  $s$  possède exactement deux sous-espaces propres :

$$E_1(s) = \text{Ker}(s - Id_E) \text{ et } E_{-1}(s) = \text{Ker}(s + Id_E).$$

**4) Cas où  $\chi_u$  est scindé à racines simples****Propriété 31 (Cas où  $\chi_u$  est scindé à racines simples)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Si  $\chi_u$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{K}$ , alors  $u$  est diagonalisable.

## IV Endomorphismes/matrices trigonalisables

$E$  désigne encore un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### 1) Définition

#### Définition 32 (Endomorphisme trigonalisable)

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **trigonalisable** lorsqu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire.

#### Vocabulaire

**Trigonaliser** l'endomorphisme  $u$  signifie trouver une telle base de  $E$ , appelée **base de trigonalisation** de  $u$ .

#### Définition 33 (Matrice trigonalisable)

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire, c'est-à-dire lorsqu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire.

#### Vocabulaire

**Trigonaliser** la matrice  $A$ , c'est déterminer explicitement une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire. Comme pour la diagonalisation, **les colonnes de  $P$  représentent une base de trigonalisation** de l'endomorphisme  $u : V \mapsto AV$  canoniquement associé à  $A$ .

### 2) Théorème de trigonalisation et conséquences

#### Théorème 34 (Théorème de trigonalisation)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$$u \text{ est trigonalisable} \iff \text{le polynôme caractéristique } \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K}.$$

#### Corollaire 35 (Cas complexe / cas réel)

- (i) Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable.
- (ii) Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , alors tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  ayant toutes ses valeurs propres dans  $\mathbb{R}$  est trigonalisable.

#### Corollaire 36 (Trigonalisation des matrices carrées)

- (i) Toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.
- (ii) Toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , i.e. il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire (dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ).
- (iii) Toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$  est trigonalisable dans  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire (dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).

### 3) Expressions de la trace et du déterminant

#### Propriété 37 (Lien entre trace, déterminant et valeurs propres)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On suppose que  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $u$  (pas nécessairement distinctes, mais comptées avec multiplicité). Alors, on a

$$\operatorname{tr}(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k, \quad \det(u) = \prod_{k=1}^n \lambda_k.$$

**Corollaire 38 (Lien entre trace, dét. et valeurs propres d'une matrice)**

Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

(i) La trace de  $A$  est la somme de ses valeurs propres (**comptées avec multiplicité**).

(ii) Le déterminant de  $A$  est le produit de ses valeurs propres (**comptées avec multiplicité**).

Ces résultats sont aussi valables pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ayant toutes ses valeurs propres réelles.

**4) Trigonalisation en dimension 2****Méthode (Trigonalisation en dimension 2)**

Considérons une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . On suppose que  $A$  est **trigonalisable** dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  mais **non diagonalisable**.

En notant  $u : V \mapsto AV$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^2$  canoniquement associé à  $A$ , on a donc

$$\chi_u(X) = (X - \lambda)^2, \quad \dim(E_\lambda(u)) = 1.$$

- On détermine une base  $(v_1)$  de  $E_\lambda(u)$ . On a donc  $u(v_1) = \lambda v_1$ .
- On complète en une base  $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$  de  $\mathbb{K}^2$ .

La matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est alors de la forme  $T = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ .

Vu que cette matrice est semblable à  $A$ , on a  $\text{tr}(T) = \text{tr}(A) = 2\lambda$ , et donc

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On a donc trigonalisé  $A$ , puisque  $T$  est triangulaire et semblable à  $A$  : en effet, on a  $T = P^{-1}AP$ , où  $P$  est la matrice de passage dont les colonnes sont les coordonnées de  $v_1$  et  $v_2$  dans la base canonique.

**Méthode (Choix optimal de  $v_2$ )**

On peut "**optimiser**" le choix du vecteur  $v_2$ , afin d'obtenir une base  $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$  dans laquelle la matrice de  $u$  est

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Il suffit pour cela de prendre  $v_2$  tel que

$$u(v_2) = v_1 + \lambda v_2$$

(et c'est toujours possible, c'est l'objet d'une théorie plus poussée appelée la "réduction de Jordan").

En pratique, le calcul d'un tel vecteur  $v_2$  est simple (système linéaire avec second membre à résoudre) :

en notant  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  les coordonnées de  $v_2$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^2$ , et  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  celles de  $v_1$ , on a

$$u(v_2) = v_1 + \lambda v_2 \iff (u - \lambda Id)(v_2) = v_1 \iff (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

**5) Trigonalisation en dimension 3**

Considérons une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ . On suppose que  $A$  est **trigonalisable** dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  mais **non diagonalisable**.

En notant  $u : V \mapsto AV$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^3$  canoniquement associé à  $A$ , on a donc deux cas possibles :

- $\chi_u(X) = (X - \alpha)(X - \beta)^2$  avec  $\alpha \neq \beta$ , et  $\dim(E_\alpha(u)) = \dim(E_\beta(u)) = 1$ .
- $\chi_u(X) = (X - \alpha)^3$  avec  $\dim(E_\alpha(u)) = 1$  ou  $2$ .

### a) Trigonalisation avec une valeur propre simple et une double

On suppose que  $\chi_u(X) = (X - \alpha)(X - \beta)^2$  avec  $\alpha \neq \beta$  et les sous-espaces propres vérifient :

$$\dim(E_\alpha(u)) = \dim(E_\beta(u)) = 1.$$

#### Méthode

- On détermine une base  $(v_1)$  de  $E_\alpha(u)$  et une base  $(v_2)$  de  $E_\beta(u)$ .  
Puisque les deux espaces propres sont en somme directe,  $(v_1, v_2)$  est une famille libre de  $\mathbb{K}^3$ .
- On peut la compléter en une base  $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{K}^3$ .  
Puisque  $u(v_1) = \alpha v_1$  et  $u(v_2) = \beta v_2$ , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

- Pour des raisons de trace ( $\text{tr}(T) = \text{tr}(A) = \alpha + 2\beta$ ), on a nécessairement :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

On a bien trigonalisé  $A$ , puisque  $T$  est semblable à  $A$  et que  $T$  est triangulaire.

#### Méthode (Choix optimal de $v_3$ )

On peut en fait trigonaliser "mieux que ça" et montrer que  $A$  est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Pour cela, il suffit de choisir  $v_3$  tel que

$$u(v_3) = v_2 + \beta v_3,$$

plutôt que de compléter  $(v_1, v_2)$  "au hasard", et la théorie assure que c'est toujours possible dans ce cas.

### b) Trigonalisation avec une valeur propre triple

La situation est plus complexe.

On suppose que  $\chi_u(X) = (X - \alpha)^3$  avec  $\dim(E_\alpha(u)) \in \{1; 2\}$ .

#### Méthode

- Si  $\dim(E_\alpha(u)) = 2$ , alors la situation est similaire au cas a) : on ne dispose que de **deux** vecteurs propres libres  $(v_1, v_2)$ .

On montre que  $A$  est semblable à  $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ , en construisant une base  $(v_1, v_2, v_3)$  telle

$$\text{que } \begin{cases} u(v_1) = \alpha v_1 \\ u(v_2) = \alpha v_2 \\ u(v_3) = v_2 + \alpha v_3 \end{cases}.$$

- Si  $\dim(E_\alpha(u)) = 1$ , alors c'est encore plus compliqué : on ne dispose que d'**un seul** vecteur propre  $v_1$  libre (puisque  $E_\alpha$  est une droite, tous les vecteurs propres sont colinéaires entre eux).

Cette fois-ci, on montre que  $A$  est semblable à  $T = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ , en construisant une base

$$(v_1, v_2, v_3) \text{ telle que } \begin{cases} u(v_1) = \alpha v_1 \\ u(v_2) = v_1 + \alpha v_2 \\ u(v_3) = v_2 + \alpha v_3 \end{cases}.$$

## V Endomorphismes/matrices nilpotents

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec  $\mathbb{K}$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

### Notation

On rappelle que  $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre (non commutative dès que  $\dim(E) \geq 2$ ).

Classiquement, on notera la composition des endomorphismes de la façon suivante :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \underbrace{u \circ u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}},$$

avec la convention  $u^0 = Id_E$ .

### Définition 39 (Endomorphisme nilpotent, indice de nilpotence)

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est **nilpotent** lorsqu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

Dans ce cas, on appelle **indice de nilpotence de  $u$**  le plus petit entier  $k \geq 1$  tel que  $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

### Définition 40 (Matrice nilpotente, indice de nilpotence)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On dit que  $A$  est **nilpotente** lorsqu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ .

Dans ce cas, on appelle **indice de nilpotence de  $A$**  le plus petit entier  $k \geq 1$  tel que  $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ .

### Théorème 41 (Caractérisation en dimension finie des endomorphismes nilpotents)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Alors,  $u$  est nilpotent si et seulement si ( $u$  est trigonalisable et  $Sp(u) = \{0\}$ ).

### Corollaire 42 (Indice de nilpotence en dimension finie)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $u$  est nilpotent, alors son indice de nilpotence est inférieur ou égal à  $n = \dim(E)$ .