CH08 : Réduction des endomorphismes - aspects géométriques

Dans tout ce cours, $\mathbb{K}$ désigne un sous-corps de $\mathbb{C}$ (un tel corps contient nécessairement $\mathbb{Q}$, et on aura très souvent $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul.
Etant donné un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on peut se demander (lorsque E est de dimension finie) s'il existe une base de E dans laquelle u se représente par une matrice "simple", par exemple diagonale, ou triangulaire, ou diagonale par blocs. La détermination d'une telle base est appelée la **réduction** de l'endomorphisme u.

I Sous-espaces stables par un endomorphisme

1) Définition

Définition 1 (Sous-espace stable par un endomorphisme)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que $\boldsymbol{F}$ **est stable par** $\boldsymbol{u}$ *lorsque $u(F) \subset F$, c'est-à-dire ($x \in F \implies u(x) \in F$).*

Définition 2 (Endomorphisme induit sur un sous-espace stable)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E **stable par** $\boldsymbol{u}$.
Alors, l'application $u_F : \begin{cases} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{cases}$ est bien définie et c'est un endomorphisme de F.
On dit que $\boldsymbol{u_F}$ **est l'endomorphisme induit par** $\boldsymbol{u}$ **sur** $\boldsymbol{F}$.

2) Matrice dans une base adaptée à un sous-espace stable

Propriété 3 (Traduction matricielle d'un sous-espace stable)
On suppose E de dimension finie, notée $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit F un sous-espace vectoriel de E. On considère $\mathcal{B}_F = (e_1, \cdots, e_k)$ une base de F que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_k, e_{k+1}, \cdots, e_n)$ de E.
Alors, F est stable par u si et seulement si la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme suivante :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

avec $A_1 \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$. Dans ce cas, A_1 est la matrice de u_F dans la base $\mathcal{B}_F$.

II Eléments propres d'un endomorphisme

Dans la suite, on fixe un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$.

1) Vecteurs propres, valeurs propres

Définition 4 (Vecteurs propres, valeurs propres)

(i) *On dit que $x \in E$ est un* **vecteur propre** *de u lorsque $x \neq 0_E$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K},\ u(x) = \lambda x$ (i.e. x est non nul et $u(x)$ est colinéaire à x).*

(ii) *On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une* **valeur propre** *de u lorsqu'il existe $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$ et $u(x) = \lambda x$.*

Vocabulaire
Lorsque $u(x) = \lambda x$ avec x non nul, on dit que (λ, x) est un **couple valeur propre/vecteur propre**. On dit aussi que x et λ sont **associés**.
L'équation $u(x) = \lambda x$, d'inconnue $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times (E \setminus \{0\})$, est appelée **équation aux éléments propres** de u.

Propriété 5 (Caractérisation des valeurs propres)
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } u \quad &\Longleftrightarrow \quad Ker(u - \lambda Id_E) \neq \{0_E\} \\ &\Longleftrightarrow \quad u - \lambda Id_E \text{ non injective.} \end{aligned}$$

Dans ce cas, les vecteurs propres associés à λ sont les éléments non nuls de $Ker(u - \lambda Id_E)$.

Propriété 6 (Vecteur propre et droite stable)
Soit $x \in E$ un vecteur **non nul**. *On a l'équivalence :*

$$x \text{ est vecteur propre de } u \iff \text{la droite } \mathcal{D} = Vect(x) \text{ est stable par } u.$$

2) Sous-espaces propres

Définition 7 (Sous-espace propre d'un endomorphisme)
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle **sous-espace propre associé à $\boldsymbol{\lambda}$** *l'ensemble $E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda Id_E)$.*
C'est un sous-espace vectoriel non nul de E.

Théorème 8 (Indépendance linéaire des sous-espaces propres)
Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ (avec $p \geq 2$) des valeurs propres **distinctes** *de u. Alors :*

(i) *les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe, i.e. :*
$$\sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(u)\,;$$

(ii) *si $x_1, \cdots, x_p$ sont des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, alors la famille $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre.*

Théorème 9 (Stabilité d'un sous-espace propre)
Soit u et v deux endomorphismes de E qui commutent : $u \circ v = v \circ u$.
Alors, tout sous-espace propre de u est stable par v.
En particulier, tout sous-espace propre de u est stable par u.

3) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

En dimension finie, on dispose d'une caractérisation simple des valeurs propres, grâce au déterminant. Dans toute la suite, **on suppose que $\boldsymbol{E}$ est de dimension finie**, et on note

$$n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*.$$

u désigne toujours un endomorphisme de E.

Propriété 10 (Caractérisation des valeurs propres à l'aide du det)
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on a l'équivalence :

$$\lambda \textit{ est une valeur propre de } u \iff \det(\lambda Id_E - u) = 0.$$

Propriété 11 (Structure polynomiale de $\det(\lambda Id_E - u)$)
La fonction $\lambda \mapsto \det(\lambda Id_E - u)$ est polynomiale de degré $n = \dim(E)$, avec

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \det(\lambda Id_E - u) = \lambda^n - tr(u)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u).$$

Définition 12 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique** *de u le polynôme :*

$$\chi_u(X) = \det(XId_E - u) \in \mathbb{K}[X].$$

On dispose alors du théorème suivant :

Théorème 13 (Interprétation des valeurs propres comme racines)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

(i) Les valeurs propres de u sont exactement les racines dans $\mathbb{K}$ de son polynôme caractéristique :
$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad (\lambda \textit{ valeur propre de } u \iff \chi_u(\lambda) = 0).$$

(ii) u possède au plus n valeurs propres.

Définition 14 (Spectre d'un endomorphisme)
On appellera **spectre de u** *(noté $Sp(u)$) l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{K}$ qui sont valeurs propres de u.*

4) Eléments propres d'une matrice carrée

n désigne toujours un entier naturel non nul.
Par simplicité, les vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ seront identifiés aux vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Définition 15 (Valeur/vecteur propre d'une matrice carrée)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de A** *lorsque λ est une valeur propre de l'endomorphisme canoniquement associé à A :*

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ V & \longmapsto & AV \end{cases}.$$

Tout vecteur colonne V tel que $V \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ et $AV = \lambda V$ est alors appelé **vecteur propre** *de la matrice A associé à la valeur propre λ.*

Définition 16 (Sous-espaces propres d'une matrice carrée)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A. On appelle **sous-espace propre de A associé à λ** *le sous-espace vectoriel $E_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I_n)$.*

Définition 17 (Polynôme caractéristique d'une matrice carrée)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique de A** *le polynôme :*
$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X].$$

Définition 18 (Spectre d'une matrice carrée)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **spectre** *de A (noté $Sp(A)$) l'ensemble des valeurs propres de A. C'est une partie finie de $\mathbb{K}$ (les racines de χ_A), de cardinal compris entre 0 et n.*

Propriété 19 (Valeurs propres d'une matrice triangulaire)
Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux.

Propriété 20 (Des matrices semblables ont même poly. caractéristique)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. **Si** *$A$ et B sont semblables,* **alors** *$\chi_A(X) = \chi_B(X)$.*

5) Multiplicité d'une valeur propre

Définition 21 (Multiplicité d'une valeur propre)
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **multiplicité de la valeur propre $\boldsymbol{\lambda}$** *sa multiplicité en tant que racine de $\chi_u(X)$, c'est-à-dire le plus grand entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X-\lambda)^k$ divise $\chi_u(X)$.*

Propriété 22 (Forme du polynôme caractéristique sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors χ_u est scindé, c'est-à-dire de la forme :

$$\chi_u(X) = \prod_{k=1}^{p} (X-\lambda_k)^{\alpha_k},$$

où $1 \leq p \leq n$, les $\lambda_k \in \mathbb{C}$ sont les valeurs propres distinctes de u, et les $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$ leurs multiplicités respectives.

Théorème 23 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit)
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev non nul de E stable par u.
Alors $\chi_{u_F}(X)$ divise $\chi_u(X)$.

On en déduit un lien entre la multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé :

Théorème 24 (Lien entre multiplicité de λ et dimension de $E_\lambda(u)$)
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$ de multiplicité $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$. Alors, on a

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq \alpha_\lambda,$$

où $E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda Id_E)$ est le sous-espace propre de u associé à λ.

III Endomorphismes/matrices diagonalisables

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On s'intéresse au problème suivant : existe-t-il une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale ?

1) Définition

Définition 25 (Endomorphisme diagonalisable)
On dit que u est **diagonalisable** *lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.*

Propriété 26 (Définition équivalente d'un endomorphisme diagonalisable)
u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Vocabulaire
Si u est diagonalisable, **diagonaliser** l'endomorphisme u signifie trouver une telle base de vecteurs propres, appelée aussi **base de diagonalisation** de u.

On définit naturellement une notion analogue sur les matrices carrées :

Définition 27 (Matrice diagonalisable)
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** *lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.*

Vocabulaire
Dans ce cas, **diagonaliser** la matrice A, c'est déterminer une matrice inversible P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.

2) Théorème de diagonalisation

De manière générale, on dispose d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme (ou une matrice) soit diagonalisable.

Théorème 28 (Caractérisation des endomorphismes diagonalisables)
u est diagonalisable si et seulement si $\left(Sp(u) \neq \emptyset \text{ et } \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) = E \right)$.
Dans ce cas, on a

$$\chi_u(X) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)^{\dim(E_\lambda(u))}$$

(chaque valeur propre a une multiplicité égale à la dimension du sous-espace propre associé).

On déduit de la proposition précédente le théorème suivant :

Théorème 29 (Théorème de diagonalisation)
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On note $\chi_u(X) = \det(XId_E - u)$ son polynôme caractéristique.

- (i) **Si $\boldsymbol{\chi_u}$ n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$**, *alors u n'est pas diagonalisable.*
- (ii) **Si $\boldsymbol{\chi_u}$ est scindé sur $\mathbb{K}$**, *alors en notant $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ (avec les λ_k deux à deux distincts et les $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$), on a les équivalences :*

$$\begin{aligned} u \text{ est diagonalisable} &\iff E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u) = E \\ &\iff \sum_{k=1}^{p} \dim(E_{\lambda_k}(u)) = n \\ &\iff \forall k \in [\![1;p]\!],\ \dim(E_{\lambda_k}(u)) = \alpha_k \end{aligned}.$$

Dans ce cas, on obtient une base de diagonalisation de u en concaténant des bases des sous-espaces propres.

3) Cas des projecteurs et symétries

Propriété 30 (Diagonalisabilité des projecteurs et symétries)

- (i) *Tout projecteur $p : E \to E$ est diagonalisable.*
  De plus, si $p \notin \{0_{\mathcal{L}(E)}, Id_E\}$, alors p possède exactement deux sous-espaces propres :
  $E_0(p) = Ker(p)$ et $E_1(p) = Ker(p - Id_E) = Im(p)$.
- (ii) *Toute symétrie $s : E \to E$ est diagonalisable.*
  De plus, si $s \notin \{Id_E, -Id_E\}$, alors s possède exactement deux sous-espaces propres :
  $E_1(s) = Ker(s - Id_E)$ et $E_{-1}(s) = Ker(s + Id_E)$.

4) Cas où χ_u est scindé à racines simples

Propriété 31 (Cas où χ_u est scindé à racines simples)
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Si *χ_u est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$,* **alors** *u est diagonalisable.*

IV Endomorphismes/matrices trigonalisables

E désigne encore un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Définition

Définition 32 (Endomorphisme trigonalisable)
Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **trigonalisable** *lorsqu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.*

Vocabulaire
Trigonaliser l'endomorphisme u signifie trouver une telle base de E, appelée **base de trigonalisation** de u.

Définition 33 (Matrice trigonalisable)
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **trigonalisable** *lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire, c'est-à-dire lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire.*

Vocabulaire
Trigonaliser la matrice A, c'est déterminer explicitement une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire. Comme pour la diagonalisation, **les colonnes de P représentent une base de trigonalisation** de l'endomorphisme $u : V \mapsto AV$ canoniquement associé à A.

2) Théorème de trigonalisation et conséquences

Théorème 34 (Théorème de trigonalisation)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$u \text{ est trigonalisable} \iff \text{le polynôme caractéristique } \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K}.$$

Corollaire 35 (Cas complexe / cas réel)
- (i) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable.*
- (ii) *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$* **ayant toutes ses valeurs propres dans R** *est trigonalisable.*

Corollaire 36 (Trigonalisation des matrices carrées)
- (i) *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.*
- (ii) *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est trigonalisable* **dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$**, *i.e. il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).*
- (iii) *Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$* **telle que χ_A est scindé sur R** *est trigonalisable* **dans R**, *c'est-à-dire qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit triangulaire (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).*

3) Expressions de la trace et du déterminant

Propriété 37 (Lien entre trace, déterminant et valeurs propres)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On suppose que χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de u **(pas nécessairement distinctes, mais comptées avec multiplicité)**. *Alors, on a*

$$tr(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k, \qquad \det(u) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Corollaire 38 (Lien entre trace, dét. et valeurs propres d'une matrice)
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

(*i*) *La trace de A est la somme de ses valeurs propres (***comptées avec multiplicité***).*

(*ii*) *Le déterminant de A est le produit de ses valeurs propres (***comptées avec multiplicité***).*

Ces résultats sont aussi valables pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ayant toutes ses valeurs propres réelles.

4) Trigonalisation en dimension 2

Méthode (Trigonalisation en dimension 2)
Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On suppose que A est **trigonalisable** *dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ mais* **non diagonalisable**.
En notant $u : V \mapsto AV$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^2$ canoniquement associé à A, on a donc

$$\chi_u(X) = (X - \lambda)^2, \quad \dim(E_\lambda(u)) = 1.$$

- *On détermine une base (v_1) de $E_\lambda(u)$. On a donc $u(v_1) = \lambda v_1$.*
- *On complète en une base $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$ de $\mathbb{K}^2$.*
  La matrice de u dans $\mathcal{B}$ est alors de la forme $T = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$.
  Vu que cette matrice est semblable à A, on a $tr(T) = tr(A) = 2\lambda$, et donc

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

  On a donc trigonalisé A, puisque T est triangulaire et semblable à A : en effet, on a $T = P^{-1}AP$, où P est la matrice de passage dont les colonnes sont les coordonnées de v_1 et v_2 dans la base canonique.

Méthode (Choix optimal de v_2)
On peut **"optimiser" le choix du vecteur $\boldsymbol{v_2}$***, afin d'obtenir une base $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$ dans laquelle la matrice de u est*

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Il suffit pour cela de prendre v_2 tel que

$$u(v_2) = v_1 + \lambda v_2$$

(et c'est toujours possible, c'est l'objet d'une théorie plus poussée appelée la "réduction de Jordan").
En pratique, le calcul d'un tel vecteur v_2 est simple (système linéaire avec second membre à résoudre) : en notant $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées de v_2 dans la base canonique de $\mathbb{K}^2$, et $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ celles de v_1, on a

$$u(v_2) = v_1 + \lambda v_2 \iff (u - \lambda Id)(v_2) = v_1 \iff (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

5) Trigonalisation en dimension 3

Considérons une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. On suppose que A est **trigonalisable** dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ mais **non diagonalisable**.

En notant $u : V \mapsto AV$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à A, on a donc deux cas possibles :

a) $\chi_u(X) = (X - \alpha)(X - \beta)^2$ avec $\alpha \neq \beta$, et $\dim(E_\alpha(u)) = \dim(E_\beta(u)) = 1$.

b) $\chi_u(X) = (X - \alpha)^3$ avec $\dim(E_\alpha(u)) = 1$ ou 2.

a) Trigonalisation avec une valeur propre simple et une double

On suppose que $\chi_u(X) = (X-\alpha)(X-\beta)^2$ avec $\alpha \neq \beta$ et les sous-espaces propres vérifient :

$$\dim(E_\alpha(u)) = \dim(E_\beta(u)) = 1.$$

Méthode

- *On détermine une base* (v_1) *de* $E_\alpha(u)$ *et une base* (v_2) *de* $E_\beta(u)$.
  Puisque les deux espaces propres sont en somme directe, (v_1, v_2) *est une famille libre de* $\mathbb{K}^3$.
- *On peut la compléter en une base* $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$ *de* $\mathbb{K}^3$.
  Puisque $u(v_1) = \alpha v_1$ *et* $u(v_2) = \beta v_2$*, on a*
  $$Mat_{\mathcal{B}}(u) = T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$
- *Pour des raisons de trace (* $tr(T) = tr(A) = \alpha + 2\beta$*), on a nécessairement :*
  $$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$
  On a bien trigonalisé A*, puisque* T *est semblable à* A *et que* T *est triangulaire.*

Méthode (Choix optimal de v_3)

On peut en fait trigonaliser "mieux que ça" et montrer que A *est semblable à*

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Pour cela, il suffit de choisir v_3 *tel que*

$$u(v_3) = v_2 + \beta v_3,$$

plutôt que de compléter (v_1, v_2) *"au hasard", et la théorie assure que c'est toujours possible dans ce cas.*

b) Trigonalisation avec une valeur propre triple

La situation est plus complexe.
On suppose que $\chi_u(X) = (X-\alpha)^3$ avec $\dim(E_\alpha(u)) \in \{1; 2\}$.

Méthode

- *Si* $\dim(E_\alpha(u)) = 2$*, alors la situation est similaire au cas a) : on ne dispose que de* **deux** *vecteurs propres libres* (v_1, v_2).
  On montre que A *est semblable à* $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$*, en construisant une base* (v_1, v_2, v_3) *telle que* $\begin{cases} u(v_1) = \alpha v_1 \\ u(v_2) = \alpha v_2 \\ u(v_3) = v_2 + \alpha v_3 \end{cases}$.
- *Si* $\dim(E_\alpha(u)) = 1$*, alors c'est encore plus compliqué : on ne dispose que d'***un seul** *vecteur propre* v_1 *libre (puisque* E_α *est une droite, tous les vecteurs propres sont colinéaires entre eux).*
  Cette fois-ci, on montre que A *est semblable à* $T = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$*, en construisant une base* (v_1, v_2, v_3) *telle que* $\begin{cases} u(v_1) = \alpha v_1 \\ u(v_2) = v_1 + \alpha v_2 \\ u(v_3) = v_2 + \alpha v_3 \end{cases}$.

V Endomorphismes/matrices nilpotents

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Notation
On rappelle que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (non commutative dès que $\dim(E) \geq 2$).
Classiquement, on notera la composition des endomorphismes de la façon suivante :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E),\ \forall k \in \mathbb{N}, \qquad u^k = \underbrace{u \circ u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}},$$

avec la convention $u^0 = Id_E$.

Définition 39 (Endomorphisme nilpotent, indice de nilpotence)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **nilpotent** *lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*
Dans ce cas, on appelle **indice de nilpotence de u** *le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*

Définition 40 (Matrice nilpotente, indice de nilpotence)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est **nilpotente** *lorsqu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.*
Dans ce cas, on appelle **indice de nilpotence de A** *le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.*

Théorème 41 (Caractérisation en dimension finie des endomorphismes nilpotents)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors, u est nilpotent si et seulement si (u est trigonalisable et $Sp(u) = \{0\}$).

Corollaire 42 (Indice de nilpotence en dimension finie)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est nilpotent, alors son indice de nilpotence est inférieur ou égal à $n = \dim(E)$.