

# CH08 : Réduction des endomorphismes - aspects géométriques

---



# Table des matières

I	Sous-espaces stables par un endomorphisme . . . . .	4
	1) Définition . . . . .	4
	2) Matrice dans une base adaptée à un sous-espace stable . . . . .	4
II	Éléments propres d'un endomorphisme . . . . .	7
	1) Vecteurs propres, valeurs propres . . . . .	7
	2) Sous-espaces propres . . . . .	8
	3) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme . . . . .	10
	4) Éléments propres d'une matrice carrée . . . . .	12
	5) Multiplicité d'une valeur propre . . . . .	14
III	Endomorphismes/matrices diagonalisables . . . . .	17
	1) Définition . . . . .	17
	2) Théorème de diagonalisation . . . . .	17
	3) Cas des projecteurs et symétries . . . . .	21
	4) Cas où $\chi_u$ est scindé à racines simples . . . . .	21
IV	Endomorphismes/matrices trigonalisables . . . . .	24
	1) Définition . . . . .	24
	2) Théorème de trigonalisation et conséquences . . . . .	25
	3) Expressions de la trace et du déterminant . . . . .	26
	4) Trigonalisation en dimension 2 . . . . .	27
	5) Trigonalisation en dimension 3 . . . . .	28
	a) Trigonalisation avec une valeur propre simple et une double . . . . .	28
	b) Trigonalisation avec une valeur propre triple . . . . .	29
V	Endomorphismes/matrices nilpotents . . . . .	30

Dans tout ce cours,  $\mathbb{K}$  désigne un sous-corps de  $\mathbb{C}$  (un tel corps contient nécessairement  $\mathbb{Q}$ , et on aura très souvent  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ), et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul.

Etant donné un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on peut se demander (lorsque  $E$  est de dimension finie) s'il existe une base de  $E$  dans laquelle  $u$  se représente par une matrice "simple", par exemple diagonale, ou triangulaire, ou diagonale par blocs. La détermination d'une telle base est appelée la **réduction** de l'endomorphisme  $u$ .

## I Sous-espaces stables par un endomorphisme

### 1) Définition

**Définition 1 (Sous-espace stable par un endomorphisme)**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On dit que  $F$  est stable par  $u$  lorsque  $u(F) \subset F$ , c'est-à-dire  $(x \in F \implies u(x) \in F)$ .

**Exemple**

Soit  $u : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$  l'endomorphisme de dérivation  $u(P) = P'$ .

Alors, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , le sous-espace  $\mathbb{K}_n[X]$  est stable par  $u$ .

En effet,  $u(1) = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u(X^n) = nX^{n-1}$ , donc, par linéarité de  $u$ ,

$$\begin{cases} u(\mathbb{K}_0[X]) = \{0_{\mathbb{K}[X]}\} \subset \mathbb{K}_0[X] \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u(\mathbb{K}_n[X]) \subset \mathbb{K}_{n-1}[X] \subset \mathbb{K}_n[X] \end{cases} .$$

**Définition 2 (Endomorphisme induit sur un sous-espace stable)**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $u$ .

Alors, l'application  $u_F : \begin{cases} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{cases}$  est bien définie et c'est un endomorphisme de  $F$ .

On dit que  $u_F$  est l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$ .

**Preuve**

A priori, la restriction de  $u$  à  $F$  est une application  $u|_F : F \rightarrow E$ . Vu que  $u(F) \subset F$ , on a  $u_F : F \rightarrow F$  qui est bien définie ( $x \in F \implies u_F(x) = u(x) \in F$ ). Enfin, la linéarité de  $u|_F$ , donc celle de  $u_F$ , résulte de celle de  $u$ .

**ATTENTION !**

Si  $F$  n'est pas stable par  $u$ , ça ne marche pas! On peut seulement dire que la restriction  $u|_F$  est une application linéaire de  $F$  dans  $E$ .

Bien saisir la différence de notation entre  $u|_F : F \rightarrow E$  et  $u_F : F \rightarrow F$ .

### 2) Matrice dans une base adaptée à un sous-espace stable

**Propriété 3 (Traduction matricielle d'un sous-espace stable)**

On suppose  $E$  de dimension finie, notée  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On considère  $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_k)$  une base de  $F$  que l'on complète en une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ .

Alors,  $F$  est stable par  $u$  si et seulement si la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  est de la forme suivante :

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix},$$

avec  $A_1 \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ . Dans ce cas,  $A_1$  est la matrice de  $u_F$  dans la base  $\mathcal{B}_F$ .

**Preuve**

Si  $F$  est stable par  $u$ , alors pour tout  $1 \leq i \leq k$ , le vecteur  $e_i$  est dans  $F$ , donc son image  $u(e_i)$  aussi. On a donc  $u(e_i) \in Vect(e_1, \dots, e_k)$ , c'est-à-dire que pour  $i$  compris entre 1 et  $k$ , les vecteurs  $u(e_i)$  ont des coordonnées nulles suivant  $e_{k+1}, \dots, e_n$ , et cela explique la forme de la matrice (dans les  $k$

premières colonnes, les coefficients sous la  $k^e$  ligne sont nuls).

Réciproquement : si  $Mat_{\mathcal{B}}(u)$  est de la forme annoncée, alors par lecture des  $k$  premières colonnes, on obtient que pour tout  $1 \leq i \leq k$  :

$$u(e_i) \in Vect(e_1, \dots, e_k) = F,$$

donc par linéarité de  $u$ , on en déduit  $u(F) \subset F$ .

Enfin, les colonnes de  $A_1$  sont les coordonnées des vecteurs  $u(e_i) = u_F(e_i)$  (pour  $1 \leq i \leq k$ ) dans la base  $(e_1, \dots, e_k)$  du sev  $F$ , donc  $A_1 = Mat_{\mathcal{B}_F}(u_F)$ .

### Exemple

On considère  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

On note  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, y + z = 0\}$ .

- Déterminer une base  $(\vec{u}, \vec{v})$  de  $\mathcal{P}$ .
- Montrer que  $\mathcal{P}$  est stable par  $f$ .
- On pose  $\vec{w}_1 = (0; 0; 1)$ . Montrer que  $\mathcal{B}_1 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer  $M_1 = Mat_{\mathcal{B}_1}(f)$ .
- On pose  $\vec{w}_2 = (1; 1; 1)$ . Montrer que  $\mathcal{B}_2 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer  $M_2 = Mat_{\mathcal{B}_2}(f)$ . Interpréter la forme de  $M_2$ .

### Solution :

- On a  $\mathcal{P} = Vect((1, 0, 0), (0, 1, -1))$ . On pose  $\vec{u} = (1, 0, 0)$  et  $\vec{v} = (0, 1, -1)$ .  
La famille  $(\vec{u}, \vec{v})$  est génératrice de  $\mathcal{P}$  et libre (deux vecteurs non proportionnels) donc c'est une base de  $\mathcal{P}$ .

- Montrons que le plan  $\mathcal{P}$  est stable par  $f$ .

Comme nous disposons d'une base de  $\mathcal{P}$  il suffit ici de montrer que  $f(\vec{u}) \in \mathcal{P}$  et  $f(\vec{v}) \in \mathcal{P}$ .

$$\text{Or, } M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } f(\vec{u}) = (1, -1, 1) \in \mathcal{P}.$$

$$\text{De plus, } M \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ donc } f(\vec{v}) = (1, 1, -1) \in \mathcal{P}.$$

Ainsi,  $\mathcal{P}$  est stable par  $f$ .

- Déterminons la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1)$ .

Nous avons déjà calculé  $f(\vec{u})$  et  $f(\vec{v})$ . Il nous manque  $f(\vec{w}_1)$ .

$$\text{Or, } M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } f(\vec{w}_1) = (0, 1, 1) = \vec{v} + 2\vec{w}_1.$$

$$\begin{aligned} \text{En résumé : } f(\vec{u}) &= (1, -1, 1) = 1\vec{u} + (-1)\vec{v} + 0\vec{w}_1 \\ f(\vec{v}) &= (1, 1, -1) = 1\vec{u} + 1\vec{v} + 0\vec{w}_1 \\ f(\vec{w}_1) &= (0, 1, 1) = 0\vec{u} + 1\vec{v} + 2\vec{w}_1 \end{aligned} .$$

$$\text{Donc } M_1 = Mat_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Déterminons la matrice de  $f$  dans la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2)$ .

Nous avons déjà calculé  $f(\vec{u})$  et  $f(\vec{v})$ . Il nous manque  $f(\vec{w}_2)$ .

$$\text{Or, } M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ donc } f(\vec{w}_2) = (2, 2, 2).$$

$$\begin{aligned} \text{En résumé : } f(\vec{u}) &= (1, -1, 1) = 1\vec{u} + (-1)\vec{v} + 0\vec{w}_2 \\ f(\vec{v}) &= (1, 1, -1) = 1\vec{u} + 1\vec{v} + 0\vec{w}_2 \\ f(\vec{w}_2) &= (2, 2, 2) = 0\vec{u} + 0\vec{v} + 2\vec{w}_2 \end{aligned} .$$

$$\text{Donc } M_2 = \text{Mat}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Interprétation :** La forme de  $M_2$  (en deux blocs) indique que le plan  $\mathcal{P} = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$  est stable par  $f$ , mais aussi la droite  $\mathcal{D} = \text{Vect}(\vec{w}_2)$ . On a donc une décomposition de l'espace en deux sous-espaces stables par  $f$  :

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{P} \oplus \mathcal{D},$$

et en notant  $f_{\mathcal{P}}$  et  $f_{\mathcal{D}}$  les endomorphismes induits par  $f$  sur ces deux sev stables, on a

$$\text{Mat}_{(\vec{u}, \vec{v})}(f_{\mathcal{P}}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Mat}_{(\vec{w}_2)}(f_{\mathcal{D}}) = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

### Remarque

Il faut aussi être capable de reconnaître un sous-espace stable à partir de la forme de la matrice d'un endomorphisme.

### Exemple

On considère  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$  canoniquement associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Déterminer sans calculs un sev de  $E$  stable par  $u$ . **Solution :** Uniquement avec la forme de la matrice,

on peut affirmer que  $F = \text{Vect}(X, X^2)$  est un sous-espace stable par  $u$ .

En effet, la lecture des colonnes de  $A$  dit que :

$$\begin{cases} u(1) = 1 - 2X^2 + 2X^3 \\ u(X) = 2X - X^2 \\ u(X^2) = 3X - X^2 \\ u(X^3) = -1 + 4X + 3X^3 \end{cases}.$$

Donc on a bien  $u(X) \in F$  et  $u(X^2) \in F$ , et comme  $(X, X^2)$  est une base de  $F$  on peut affirmer que  $u(F) \subset F$ .

## II Eléments propres d'un endomorphisme

Dans la suite, on fixe un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

### 1) Vecteurs propres, valeurs propres

#### Définition 4 (Vecteurs propres, valeurs propres)

- (i) On dit que  $x \in E$  est un **vecteur propre** de  $u$  lorsque  $x \neq 0_E$  et  $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $u(x) = \lambda x$  (i.e.  $x$  est non nul et  $u(x)$  est colinéaire à  $x$ ).
- (ii) On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de  $u$  lorsqu'il existe  $x \in E$  tel que  $x \neq 0_E$  et  $u(x) = \lambda x$ .

#### Vocabulaire

Lorsque  $u(x) = \lambda x$  avec  $x$  non nul, on dit que  $(\lambda, x)$  est un **couple valeur propre/vecteur propre**. On dit aussi que  $x$  et  $\lambda$  sont **associés**.

L'équation  $u(x) = \lambda x$ , d'inconnue  $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times (E \setminus \{0\})$ , est appelée **équation aux éléments propres** de  $u$ .

#### ATTENTION !

Un vecteur propre n'est **pas nul** par convention, mais une valeur propre peut-être nulle.

#### Remarque

- Si  $x$  est un vecteur propre de  $u$ , alors il est associé à une unique valeur propre. En effet, si  $u(x) = \lambda x = \mu x$  avec  $x \neq 0_E$ , alors  $(\lambda - \mu)x = 0_E$ , et donc  $\lambda - \mu = 0$  (puisque  $x \neq 0_E$ ).
- En revanche, si  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$ , alors il existe une infinité de vecteurs propres associés à  $\lambda$ . En effet, si  $u(x) = \lambda x$  avec  $x \neq 0_E$ , alors pour tout  $\alpha \in \mathbb{K}^*$ , on a  $u(\alpha x) = \alpha u(x) = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x)$ , donc  $\alpha x$  (qui est non nul) est aussi un vecteur propre associé à  $\lambda$ .

#### Propriété 5 (Caractérisation des valeurs propres)

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a les équivalences :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } u &\iff \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\} \\ &\iff u - \lambda \text{Id}_E \text{ non injective.} \end{aligned}$$

Dans ce cas, les vecteurs propres associés à  $\lambda$  sont les éléments non nuls de  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ .

#### Preuve

Pour tout  $x \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on a

$$u(x) = \lambda x \iff u(x) - \lambda \text{Id}_E(x) = 0_E \iff (u - \lambda \text{Id}_E)(x) = 0_E \iff x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E),$$

donc :

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \iff \exists x \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E), x \neq 0_E.$$

La deuxième équivalence résulte du fait qu'un endomorphisme est injectif si et seulement si son noyau est nul.

#### Propriété 6 (Vecteur propre et droite stable)

Soit  $x \in E$  un vecteur **non nul**. On a l'équivalence :

$$x \text{ est vecteur propre de } u \iff \text{la droite } \mathcal{D} = \text{Vect}(x) \text{ est stable par } u.$$

#### Preuve

$\implies$  Si  $x$  est un vecteur propre de  $u$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ . En notant  $\mathcal{D} = \text{Vect}(x)$ , montrons alors que  $u(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$ . Si  $y \in \mathcal{D}$ , alors il existe  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que  $y = \alpha x$ . Donc

$$u(y) = u(\alpha x) = \alpha u(x) = \alpha(\lambda x) = (\alpha\lambda)x,$$

ce qui montre que  $u(y) \in Vect(x) = \mathcal{D}$ .

$\Leftarrow$  Si  $\mathcal{D} = Vect(x)$  est stable par  $u$ , alors  $u(x) \in \mathcal{D}$ , puisque  $x \in \mathcal{D}$ . Cela signifie qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ , et donc  $x$  est vecteur propre de  $u$ .

## 2) Sous-espaces propres

### Définition 7 (Sous-espace propre d'un endomorphisme)

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On appelle **sous-espace propre associé à  $\lambda$**  l'ensemble  $E_\lambda(u) = Ker(u - \lambda Id_E)$ .

C'est un sous-espace vectoriel non nul de  $E$ .

### Remarque

On a  $E_\lambda(u) = \{x \in E, (u - \lambda Id_E)(x) = 0_E\} = \{x \in E, u(x) = \lambda x\}$  :

cet ensemble est donc formé des vecteurs propres de  $u$  associés à  $\lambda$  ainsi que du vecteur nul.

### Exemple

- Si 0 est valeur propre de  $u$ , alors le sous-espace propre associé à  $\lambda = 0$  est  $E_0(u) = Ker(u)$ .
- Si 1 est valeur propre de  $u$ , alors le sous-espace propre associé à  $\lambda = 1$  est  $E_1(u) = Ker(u - Id_E) = \{x \in E, u(x) = x\}$ . C'est l'ensemble des vecteurs invariants par  $u$  ("points fixes de  $u$ ").

### Exemple (Valeurs propres d'une homothétie vectorielle)

Soit  $u = \alpha Id_E$  avec  $\alpha \in \mathbb{K}$ . Calculons les valeurs propres et sous-espaces propres de  $u$ .

Pour les déterminer, procédons par analyse-synthèse :

- Analyse : si  $\lambda$  est valeur propre de l'homothétie  $u = \alpha Id_E$ , alors notons  $x \neq 0_E$  un vecteur propre associé. On a  $u(x) = \lambda x$ , mais aussi  $u(x) = (\alpha Id_E)(x) = \alpha x$ , donc  $(\lambda - \alpha)x = 0_E$ , ce qui conduit à  $\lambda = \alpha$  puisque le vecteur  $x$  est non nul.  
Ceci montre que  $u$  possède au plus une valeur propre : le scalaire  $\alpha$ .
- Synthèse : le scalaire  $\alpha$  est effectivement une valeur propre de  $u$ , puisque tous les vecteurs  $x$  non nuls sont vecteurs propres associés (vu que  $u(x) = \alpha x$  pour tout  $x \in E$ ).

Finalement,  $u = \alpha Id_E$  possède une seule valeur propre :  $\lambda = \alpha$ , et le sous-espace propre associé est  $E_\alpha(u) = Ker(u - \alpha Id_E) = Ker(0_{\mathcal{L}(E)}) = E$ .

### Exemple (Valeurs propres de la dérivation)

Soit  $E = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , et soit  $u : E \rightarrow E$  l'endomorphisme défini par  $u(y) = y'$ .

Calculons les valeurs propres et sous-espaces propres de  $u$ .

- Tout réel  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  :  
en effet, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , l'équation  $u(y) = \lambda y$  possède des solutions non nulles, puisqu'il s'agit de l'équation différentielle  $y' = \lambda y$ , dont les solutions sont les fonctions  $y : x \mapsto Ae^{\lambda x}$  avec  $A \in \mathbb{R}$ .  
Les vecteurs propres associés à  $\lambda$  sont les fonctions  $y : x \mapsto Ae^{\lambda x}$  avec  $A \in \mathbb{R}^*$ .
- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , le sous-espace propre associé est  $E_\lambda(u) = Vect(x \mapsto e^{\lambda x})$ .  
Les sous-espaces propres de  $u$  sont donc des droites (ils sont tous de dimension 1).

Voici donc un exemple d'endomorphisme qui possède une infinité de valeurs propres (mais ceci n'est possible qu'en dimension infinie...).

### Théorème 8 (Indépendance linéaire des sous-espaces propres)

Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$  (avec  $p \geq 2$ ) des valeurs propres **distinctes** de  $u$ . Alors :

(i) les sous-espaces propres  $E_{\lambda_i}(u)$  sont en somme directe, i.e. :

$$\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) ;$$

(ii) si  $x_1, \dots, x_p$  sont des vecteurs propres respectivement associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ , alors la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre.



**ATTENTION !**

Bien sûr, on a  $\bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u) \subset E$ , mais **cette inclusion peut être stricte**.

En général, les sous-espaces propres de  $u$  ne sont donc pas supplémentaires dans  $E$ .

**Preuve**

(i) Récurrence sur le nombre  $p$  de sous-espaces propres considérés.

- La propriété est vraie pour  $p = 2$  : en effet, si on considère deux valeurs propres  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , alors :

$$x \in E_{\lambda_1}(u) \cap E_{\lambda_2}(u) \implies u(x) = \lambda_1 x = \lambda_2 x \implies \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} x = 0_E \implies x = 0_E.$$

Donc  $E_{\lambda_1}(u) \cap E_{\lambda_2}(u) = \{0_E\}$ , ce qui montre que

$$E_{\lambda_1}(u) + E_{\lambda_2}(u) = E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u).$$

- Soit  $p \geq 2$ . On suppose que la propriété est vraie pour  $p$  sous-espaces propres. Montrons la pour  $p + 1$  sous-espaces propres : soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1})$   $p + 1$  valeurs propres distinctes de  $u$ . Montrons que la somme  $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$  est directe. Pour cela, on suppose :

$$x_1 + \dots + x_p + x_{p+1} = 0_E,$$

avec  $\forall i \in \{1, \dots, p+1\}$ ,  $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$ .

En appliquant  $u$  et en utilisant que  $u(x_i) = \lambda_i x_i$  pour chaque  $i$ , on obtient par linéarité :

$$u(x_1) + \dots + u(x_p) + u(x_{p+1}) = u(0_E),$$

c'est-à-dire

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p + \lambda_{p+1} x_{p+1} = 0_E.$$

Vu que  $x_{p+1} = -(x_1 + \dots + x_p)$ , ceci se réécrit

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{p+1})x_1}_{\in E_{\lambda_1}(u)} + \dots + \underbrace{(\lambda_p - \lambda_{p+1})x_p}_{\in E_{\lambda_p}(u)} = 0_E.$$

Par hypothèse, la somme  $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$  est directe, donc cette somme nulle entraîne :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \quad (\lambda_i - \lambda_{p+1})x_i = 0_E,$$

donc (puisque  $\lambda_i - \lambda_{p+1} \neq 0$  pour tout  $i \in \{1, \dots, p\}$ ) :  $x_1 = \dots = x_p = 0_E$ . Il s'ensuit  $x_{p+1} = -(x_1 + \dots + x_p) = 0_E$ .

Ceci montre que la propriété est héréditaire.

- (ii) Si  $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p = 0_E$  avec chaque  $\alpha_i \in \mathbb{K}$  et chaque  $x_i$  un vecteur propre associé à  $\lambda_i$ , alors en posant  $y_i = \alpha_i x_i$  pour tout  $i$ , on a

$$y_1 + \dots + y_p = 0_E,$$

avec chaque  $y_i \in E_{\lambda_i}(u)$ , donc puisque la somme  $\sum_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$  est directe d'après (i), on en déduit que  $y_i = 0_E$ , c'est-à-dire  $\alpha_i x_i = 0_E$  pour tout  $i$ . Mais les  $x_i$  sont non nuls (vecteurs propres), donc on a  $\alpha_i = 0$  pour tout  $i$ , ce qui montre que la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est libre.

**Théorème 9 (Stabilité d'un sous-espace propre)**

Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes de  $E$  qui commutent :  $u \circ v = v \circ u$ .

Alors, tout sous-espace propre de  $u$  est stable par  $v$ .

En particulier, tout sous-espace propre de  $u$  est stable par  $u$ .

**Preuve**

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ , et  $E_\lambda(u)$  le sous-espace propre associé.

Si  $x \in E_\lambda(u)$ , alors  $u(x) = \lambda x$ , donc

$$u(v(x)) = v(u(x)) = v(\lambda x) = \lambda v(x),$$

ce qui montre que  $v(x) \in \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = E_\lambda(u)$ . Donc  $v(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$ .

**Remarque**

Ce résultat est utile dans de nombreuses situations (voir les exercices).

**3) Polynôme caractéristique d'un endomorphisme**

En dimension finie, on dispose d'une caractérisation simple des valeurs propres, grâce au déterminant. Dans toute la suite, **on suppose que  $E$  est de dimension finie**, et on note

$$n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*.$$

$u$  désigne toujours un endomorphisme de  $E$ .

**Propriété 10 (Caractérisation des valeurs propres à l'aide du det)**

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors on a l'équivalence :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } u \iff \det(\lambda \text{Id}_E - u) = 0.$$

**Preuve**

On a vu que :  $\lambda$  valeur propre de  $u \iff u - \lambda \text{Id}_E$  non injective.

Vu qu'ici  $E$  est de dimension finie, on a l'équivalence

$$u - \lambda \text{Id}_E \text{ non injective} \iff u - \lambda \text{Id}_E \text{ non bijective}$$

(en dimension finie, un endomorphisme est bijectif ssi il est injectif). Donc

$$\lambda \text{ valeur propre de } u \iff \det(u - \lambda \text{Id}_E) = 0$$

(rappelons qu'un endomorphisme est bijectif ssi son déterminant est non nul).

Enfin, on a  $\det(\lambda \text{Id}_E - u) = (-1)^n \det(u - \lambda \text{Id}_E)$ , ce qui montre l'équivalence voulue.

**Propriété 11 (Structure polynomiale de  $\det(\lambda \text{Id}_E - u)$ )**

La fonction  $\lambda \mapsto \det(\lambda \text{Id}_E - u)$  est polynomiale de degré  $n = \dim(E)$ , avec

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \det(\lambda \text{Id}_E - u) = \lambda^n - \text{tr}(u)\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(u).$$

**Preuve**

Fixons une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et notons  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ . Alors, par définition du déterminant d'un endomorphisme :

$$\det(\lambda \text{Id}_E - u) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \cdots & -a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \cdots & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\lambda \delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)}),$$

où  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  et 0 sinon (symbole de Kronecker).

En séparant le terme correspondant à  $\sigma = \text{Id}_{\{1, \dots, n\}}$ , on obtient :

$$\det(\lambda \text{Id}_E - u) = \prod_{i=1}^n (\lambda - a_{i,i}) + Q(\lambda),$$

où

$$Q(\lambda) = \sum_{\sigma \in S_n, \sigma \neq \text{Id}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\lambda \delta_{i,\sigma(i)} - a_{i,\sigma(i)}).$$

- Le terme  $\prod_{i=1}^n (\lambda - a_{i,i})$  est un polynôme de degré  $n$  en  $\lambda$ , dont le coefficient de  $\lambda^n$  vaut 1 et le coefficient de  $\lambda^{n-1}$  vaut  $-\sum_{i=1}^n a_{i,i} = -\text{tr}(A) = -\text{tr}(u)$ .
- Etudions le terme  $Q(\lambda)$ . Si  $\sigma \neq \text{Id}_{\{1, \dots, n\}}$ , alors il existe  $i$  tel que  $\sigma(i) \neq i$ , donc par injectivité de  $\sigma$ , on a aussi  $\sigma(\sigma(i)) \neq \sigma(i)$ . Les entiers distincts  $i$  et  $\sigma(i)$  ne sont donc pas des points fixes de  $\sigma$ , ce qui montre que  $\sigma$  possède au plus  $n - 2$  points fixes. On en déduit que pour toute permutation  $\sigma \neq \text{Id}$ , le produit  $\prod_{i=1}^n (\lambda \delta_{i, \sigma(i)} - a_{i, \sigma(i)})$  possède au plus  $n - 2$  facteurs de la forme  $(\lambda - a_{i,i})$ , les autres ne dépendent pas de  $\lambda$ . Donc  $\lambda \mapsto Q(\lambda)$  est polynomiale de degré  $\leq n - 2$ .
- Par somme  $\det(\lambda \text{Id}_E - u)$  est bien un polynôme de degré  $n$ , et

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \det(\lambda \text{Id}_E - u) = \lambda^n - \text{tr}(u)\lambda^{n-1} + \dots + \beta_0,$$

et en évaluant en  $\lambda = 0$  :  $\beta_0 = \det(-u) = (-1)^n \det(u)$ .

### Définition 12 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme)

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle **polynôme caractéristique** de  $u$  le polynôme :

$$\chi_u(X) = \det(X \text{Id}_E - u) \in \mathbb{K}[X].$$

### Remarque

On a  $\deg(\chi_u) = n = \dim(E)$  et  $\chi_u$  est unitaire.

On dispose alors du théorème suivant :

### Théorème 13 (Interprétation des valeurs propres comme racines)

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , avec  $E$  de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- (i) Les valeurs propres de  $u$  sont exactement les racines dans  $\mathbb{K}$  de son polynôme caractéristique :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad (\lambda \text{ valeur propre de } u \iff \chi_u(\lambda) = 0).$$

- (ii)  $u$  possède au plus  $n$  valeurs propres.

### Preuve

D'après la proposition 10,  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$  si et seulement si  $\det(\lambda \text{Id}_E - u) = 0$ , c'est-à-dire  $\chi_u(\lambda) = 0$ . Enfin,  $\chi_u$  étant un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  de degré  $n$ , il possède au plus  $n$  racines dans  $\mathbb{K}$ . Donc  $u$  possède au plus  $n$  valeurs propres.

### Définition 14 (Spectre d'un endomorphisme)

On appellera **spectre de  $u$**  (noté  $Sp(u)$ ) l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{K}$  qui sont valeurs propres de  $u$ .

### Remarque

- Le spectre de  $u$  est une partie finie de  $\mathbb{K}$ , de cardinal inférieur ou égal à  $n$ .
- Le nombre de sous-espaces propres de  $u$  est donc limité par la dimension de  $E$ .
- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , il est possible que  $u$  ne possède aucune valeur propre (si par exemple  $\chi_u(X) = X^2 + 1$ , sans racine réelle).
- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors  $u$  possède toujours au moins une valeur propre.  
En effet, son polynôme caractéristique est dans  $\mathbb{C}[X]$ , il possède donc au moins une racine complexe (théorème de d'Alembert-Gauss).

### Exemple

Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de l'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  défini par

$$u(x, y, z) = (2x + 4z, 3x - 4y + 12z, x - 2y + 5z).$$

**Solution :**

La matrice de  $u$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ .

Le polynôme caractéristique de  $u$  vaut donc

$$\chi_u(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & 0 & -4 \\ -3 & X+4 & -12 \\ -1 & 2 & X-5 \end{vmatrix} = X(X-1)(X-2).$$

Les valeurs propres de  $u$  sont les racines de ce polynôme :

$$Sp(u) = \{0, 1, 2\}.$$

Il y a donc trois sous-espaces propres :

$$\begin{aligned} E_0(u) &= Ker(u) = Ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \\ &= Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = Vect \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$E_1(u) = Ker(u - Id) = Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & 12 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} = Ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & -5 & 12 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = Vect \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$E_2(u) = Ker(u - 2Id) = Ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & -6 & 12 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = Vect \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

#### 4) Éléments propres d'une matrice carrée

$n$  désigne toujours un entier naturel non nul.

Par simplicité, les vecteurs colonnes de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  seront identifiés aux vecteurs de  $\mathbb{K}^n$ .

##### Définition 15 (Valeur/vecteur propre d'une matrice carrée)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre de  $A$**  lorsque  $\lambda$  est une valeur propre de l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  :

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ V & \longmapsto AV \end{cases}.$$

Tout vecteur colonne  $V$  tel que  $V \neq 0_{\mathbb{K}^n}$  et  $AV = \lambda V$  est alors appelé **vecteur propre** de la matrice  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

##### Remarque

On a donc les équivalences :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } A &\iff \exists V \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}, AV = \lambda V \\ &\iff Ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\} \iff rg(A - \lambda I_n) < n \\ &\iff A - \lambda I_n \text{ non inversible} \iff \det(\lambda I_n - A) = 0. \end{aligned}$$

##### Définition 16 (Sous-espaces propres d'une matrice carrée)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $A$ . On appelle **sous-espace propre de  $A$  associé à  $\lambda$**  le sous-espace vectoriel  $E_\lambda(A) = Ker(A - \lambda I_n)$ .

##### Remarque

Pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $A$ , le sous-espace propre  $E_\lambda(A)$  est un sous-espace vectoriel non nul de  $\mathbb{K}^n$ .

##### Définition 17 (Polynôme caractéristique d'une matrice carrée)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle **polynôme caractéristique de  $A$**  le polynôme :

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X].$$

**Remarque**

- $\chi_A$  est unitaire et de degré  $n$ .
- D'après ce qui précède, les valeurs propres d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont les racines dans  $\mathbb{K}$  de son polynôme caractéristique. Il y en a donc au plus  $n$  (la taille de la matrice).

**Définition 18 (Spectre d'une matrice carrée)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle **spectre** de  $A$  (noté  $Sp(A)$ ) l'ensemble des valeurs propres de  $A$ . C'est une partie finie de  $\mathbb{K}$  (les racines de  $\chi_A$ ), de cardinal compris entre 0 et  $n$ .

**ATTENTION !**

Lorsque  $A$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , il peut y avoir ambiguïté sur la notion de "spectre" : en effet, on peut considérer  $A$  comme une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , donc parle-t-on des valeurs propres réelles ou complexes ? Pour lever cette ambiguïté, on peut utiliser les notations  $Sp_{\mathbb{R}}(A)$  et  $Sp_{\mathbb{C}}(A)$ , ou plus généralement : si  $\mathbb{K}$  est un sous-corps de  $\mathbb{K}'$  et si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors on peut noter  $Sp_{\mathbb{K}}(A)$ ,  $Sp_{\mathbb{K}'}(A)$  les spectres respectifs. On a bien entendu

$$Sp_{\mathbb{K}}(A) \subset Sp_{\mathbb{K}'}(A),$$

et l'inclusion peut être stricte.

En revanche, pour un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il n'y a en général pas d'ambiguïté puisque  $E$  est défini comme un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (avec  $\mathbb{K}$  donné), donc  $Sp(u) \subset \mathbb{K}$  par définition.

**Propriété 19 (Valeurs propres d'une matrice triangulaire)**

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses éléments diagonaux.

**Preuve**

Si  $T$  est triangulaire supérieure, son polynôme caractéristique vaut alors :

$$\chi_T(X) = \begin{vmatrix} X - a_{1,1} & -a_{1,2} & \cdots & -a_{1,n} \\ 0 & X - a_{2,2} & \cdots & -a_{2,n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & X - a_{n,n} \end{vmatrix} = (X - a_{1,1})(X - a_{2,2}) \cdots (X - a_{n,n}).$$

On a donc  $\chi_T(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{a_{1,1}, \dots, a_{n,n}\}$ , et c'est la même chose si  $T$  est triangulaire inférieure.

**Propriété 20 (Des matrices semblables ont même poly. caractéristique)**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors  $\chi_A(X) = \chi_B(X)$ .

**Preuve**

Par hypothèse, il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ . Donc, pour tout  $x \in \mathbb{K}$  :

$$xI_n - B = P^{-1}(xI_n)P - P^{-1}AP = P^{-1}(xI_n - A)P.$$

Il s'ensuit par multiplicativité du déterminant :

$$\det(xI_n - B) = \det(P^{-1}) \times \det(xI_n - A) \times \det(P) = \det(xI_n - A).$$

On a donc  $\chi_A(x) = \chi_B(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{K}$ , ce qui montre que les polynômes  $\chi_A$  et  $\chi_B$  sont égaux.

**ATTENTION !**

La réciproque est fautive. Par exemple  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ne sont **pas** semblables (en effet,  $I$  n'est semblable qu'à elle-même, puisque pour toute matrice inversible  $P$ , on a  $P^{-1}IP = P^{-1}P = I$ ), bien qu'ayant même polynôme caractéristique :  $\chi_A(X) = \chi_I(X) = (X - 1)^2$ .

**Remarque**

Deux matrices semblables ont donc les mêmes valeurs propres.

## 5) Multiplicité d'une valeur propre

### Définition 21 (Multiplicité d'une valeur propre)

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle **multiplicité de la valeur propre  $\lambda$**  sa multiplicité en tant que racine de  $\chi_u(X)$ , c'est-à-dire le plus grand entier  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $(X - \lambda)^k$  divise  $\chi_u(X)$ .

### Remarque

La multiplicité d'une valeur propre est évidemment comprise entre 1 et  $n = \deg(\chi_u)$ .

### Exemple

Si  $\chi_u(X) = (X - 3)^2(X + 1)$ , alors  $\begin{cases} \lambda_1 = 3 \text{ est valeur propre "double" (de multiplicité 2)} \\ \lambda_2 = -1 \text{ est valeur propre "simple" (de multiplicité 1)} \end{cases}$ .

### Rappel (Multiplicité et dérivées successives)

Si  $P \in \mathbb{K}[X]$  non constant, alors pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $m \in [1; \deg(P)]$  :

$$\lambda \text{ est racine de } P \text{ de multiplicité } m \iff \begin{cases} P(\lambda) = P'(\lambda) = \dots = P^{(m-1)}(\lambda) = 0 \\ P^{(m)}(\lambda) \neq 0 \end{cases}.$$

### Rappel

Un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$  est dit **scindé** sur  $\mathbb{K}$  lorsqu'il s'écrit comme le produit de polynômes de degré 1 (pas nécessairement distincts) de  $\mathbb{K}[X]$ .

### Propriété 22 (Forme du polynôme caractéristique sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ )

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $\chi_u$  est scindé, c'est-à-dire de la forme :

$$\chi_u(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k},$$

où  $1 \leq p \leq n$ , les  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  sont les valeurs propres distinctes de  $u$ , et les  $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$  leurs multiplicités respectives.

### Preuve

C'est une conséquence directe de la propriété suivante : tout polynôme non constant de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ .

Et cette propriété se démontre simplement par récurrence sur le degré du polynôme à partir du théorème de d'Alembert-Gaüss (voir cours de MP2I).

### Remarque

Avec les notations précédentes, on a  $\sum_{k=1}^p \alpha_k = \deg(\chi_u) = n$ .

### Remarque

- Bien noter qu'en général (sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) le nombre de valeurs propres **distinctes**  $p$  est inférieur ou égal à  $n = \dim(E)$ .
- Sur  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , tout endomorphisme possède  $n$  valeurs propres **pas forcément distinctes** (elles sont "comptées avec multiplicité").

### ATTENTION !

Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , alors un polynôme caractéristique n'est pas nécessairement scindé.

### Exemple (Matrice de rotation)

Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \theta \notin \pi\mathbb{Z}.$$

On a  $\chi_A(X) = (X - 1)(X^2 - (2 \cos \theta)X + 1)$ , et le facteur de degré 2 est irréductible sur  $\mathbb{R}$  (son discriminant est  $< 0$ ), donc  $\chi_A$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ .

Bien entendu, si on considère  $A$  comme une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a  $\chi_A$  scindé sur  $\mathbb{C}$  : en effet,

$$\chi_A(X) = (X - 1)(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}).$$

La matrice  $A$  ne possède donc qu'une valeur propre réelle, et deux valeurs propres complexes conjuguées. De plus, les trois valeurs propres de  $A$  sont simples (de multiplicité 1).

### **Théorème 23 (Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sev non nul de  $E$  stable par  $u$ . Alors  $\chi_{u_F}(X)$  divise  $\chi_u(X)$ .

#### **Preuve**

Notons  $d = \dim(F) \in [1, n]$ . On considère une base  $\mathcal{B}_F = (e_1, \dots, e_d)$  de  $F$ , que l'on complète en une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n)$  de  $E$ .

Puisque  $u(e_i) \in F$  pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$  (vu que  $e_i \in F$ ), la matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est de la forme  $A = \begin{pmatrix} A_1 & M_1 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$  (matrice "triangulaire par blocs"), avec  $A_1 \in \mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ ,  $M_1 \in \mathcal{M}_{d, n-d}(\mathbb{K})$  et  $M_2 \in \mathcal{M}_{n-d}(\mathbb{K})$ . Le polynôme caractéristique de  $u$  vaut donc

$$\chi_u(X) = \chi_A(X) = \det(XI_n - A) = \begin{vmatrix} XI_d - A_1 & -M_1 \\ 0 & XI_{n-d} - M_2 \end{vmatrix}.$$

Par la formule du déterminant par blocs, on a :

$$\chi_u(X) = \det(XI_d - A_1) \times \det(XI_{n-d} - M_2) = \chi_{A_1}(X) \times \chi_{M_2}(X),$$

et cette égalité entre polynômes montre que  $\chi_{A_1}(X)$  divise le polynôme  $\chi_u(X)$ . Mais  $A_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u_F)$ , donc  $\chi_{A_1}(X) = \chi_{u_F}(X)$ .

On en déduit un lien entre la multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé :

### **Théorème 24 (Lien entre multiplicité de $\lambda$ et dimension de $E_\lambda(u)$ )**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  une valeur propre de  $u \in \mathcal{L}(E)$  de multiplicité  $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$ . Alors, on a

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq \alpha_\lambda,$$

où  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$  est le sous-espace propre de  $u$  associé à  $\lambda$ .

#### **Preuve**

On applique le théorème précédent au sev  $E_\lambda(u)$ , qui est bien non nul (puisque  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$ ), et stable par  $u$  (puisque  $u$  commute avec lui-même!). Pour tout  $x \in E_\lambda(u)$ , on a  $u(x) = \lambda x$ , donc l'endomorphisme induit  $u_{E_\lambda(u)}$  est égal à  $\lambda \text{Id}_{E_\lambda(u)}$ . On en déduit que  $\chi_{\lambda \text{Id}_{E_\lambda(u)}}$  divise  $\chi_u$ , c'est-à-dire  $(X - \lambda)^d$  divise  $\chi_u$  (où  $d = \dim(E_\lambda(u))$ ) ce qui montre que la multiplicité  $\alpha_\lambda$  vérifie  $\alpha_\lambda \geq d$ , ce qui donne le résultat.

#### **Remarque (Cas d'une valeur propre simple)**

Si  $\lambda \in \mathbb{K}$  est valeur propre simple de  $u$ , alors on a  $\dim(E_\lambda(u)) = 1$ , c'est-à-dire que le sous-espace propre associé est une droite vectorielle.

**ATTENTION !**

La remarque précédente n'admet **pas de réciproque** : il est possible que  $\lambda$  soit valeur propre de multiplicité  $\geq 2$ , mais que  $\dim(E_\lambda) = 1$ . De manière générale, on peut très bien avoir  $\dim(E_\lambda) < \alpha_\lambda$ .



### III Endomorphismes/matrices diagonalisables

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On s'intéresse au problème suivant : existe-t-il une base  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale ?

#### 1) Définition

##### Définition 25 (Endomorphisme diagonalisable)

On dit que  $u$  est **diagonalisable** lorsqu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale.

##### Propriété 26 (Définition équivalente d'un endomorphisme diagonalisable)

$u$  est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ .

##### Preuve

Etant donnée une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ , la matrice  $Mat_{\mathcal{B}}(u) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  est diagonale si et seulement si

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^n \underbrace{a_{i,j}}_{=0 \text{ si } i \neq j} e_i = a_{j,j} e_j$$

pour tout  $j \in [1, n]$ , ce qui signifie que  $e_j$  est un vecteur propre de  $u$  (associé à la valeur propre  $a_{j,j}$ ), puisqu'il est non nul, en tant que membre d'une base.

##### Vocabulaire

Si  $u$  est diagonalisable, **diagonaliser** l'endomorphisme  $u$  signifie trouver une telle base de vecteurs propres, appelée aussi **base de diagonalisation** de  $u$ .

On définit naturellement une notion analogue sur les matrices carrées :

##### Définition 27 (Matrice diagonalisable)

Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est dite **diagonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire lorsqu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

##### Vocabulaire

Dans ce cas, **diagonaliser** la matrice  $A$ , c'est déterminer une matrice inversible  $P$  telle que la matrice  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

##### ATTENTION !

Toute matrice diagonale est diagonalisable, mais la réciproque est fautive ...

##### Remarque (Deux évidences)

- Si  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , alors

$$A \text{ diagonalisable} \iff \text{l'endomorphisme } u : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ V & \longmapsto AV \end{cases} \text{ est diagonalisable.}$$

- Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  est une quelconque base de  $E$ , alors

$$u \text{ diagonalisable} \iff Mat_{\mathcal{B}}(u) \text{ est diagonalisable.}$$

#### 2) Théorème de diagonalisation

De manière générale, on dispose d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme (ou une matrice) soit diagonalisable.

**Théorème 28 (Caractérisation des endomorphismes diagonalisables)**

$u$  est diagonalisable si et seulement si  $\left( Sp(u) \neq \emptyset \text{ et } \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) = E \right)$ .

Dans ce cas, on a

$$\chi_u(X) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} (X - \lambda)^{\dim(E_\lambda(u))}$$

(chaque valeur propre a une multiplicité égale à la dimension du sous-espace propre associé).

**Remarque (Reformulation)**

$u$  est diagonalisable si et seulement si les sous-espaces propres de  $u$  sont supplémentaires dans  $E$ .

**Preuve**

$\Rightarrow$  Si  $u$  est diagonalisable, alors il existe une base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ , donc  $u$  possède au moins une valeur propre, i.e.  $Sp(u) \neq \emptyset$ . On a déjà montré que la somme  $\sum_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$  est directe (cf. prop. 8), reste à prouver que cette somme est égale à  $E$ .

Chaque vecteur  $e_i$  appartient à un (seul) sous-espace propre  $E_\lambda(u)$  (mais plusieurs  $e_i$  peuvent appartenir au même  $E_\lambda(u)$ ), donc

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad e_i \in \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u).$$

Ainsi, la base  $(e_1, \dots, e_n)$  est une famille libre du sous-espace vectoriel  $\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$ , donc

$$\dim \left( \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) \right) \geq n = \dim(E).$$

Il s'ensuit  $\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) = E$ .

$\Leftarrow$  Si  $Sp(u) \neq \emptyset$  et  $\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) = E$ , alors notons  $p = \text{Card}(Sp(u)) \in \{1, \dots, n\}$  (le nombre de valeurs propres distinctes) et  $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ . En concaténant des bases respectives  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$  des sous-espaces propres  $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_p}(u)$ , on obtient une base  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$  de  $E$  adaptée à la somme directe  $\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u) = E$ . Ecrivons alors la matrice de  $u$  dans cette base. Chaque sous-espace propre  $E_{\lambda_k}(u)$  est stable par  $u$ , et l'endomorphisme induit est  $u_{E_{\lambda_k}(u)} = \lambda_k Id_{E_{\lambda_k}(u)}$ , donc

$$Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_p \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_k \end{pmatrix} = Mat(u_{E_{\lambda_k}(u)}).$$

Cette matrice est diagonale, donc  $u$  est diagonalisable.

De plus, le polynôme caractéristique de  $u$  est :

$$\chi_u(X) = \prod_{k=1}^p \chi_{A_k}(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\dim(E_{\lambda_k}(u))},$$

ce qui montre la formule voulue.

**Remarque**

Si on trouve **des** sous-espaces propres qui sont supplémentaires dans  $E$ , alors il n'y en a pas d'autres (à cause du fait que des sous-espaces propres sont toujours en somme directe), et donc  $u$  est diagonalisable.

**Remarque (IMPORTANT)**

Si  $u$  est diagonalisable, alors vu l'expression de  $\chi_u$ , n'importe quelle matrice diagonale  $D$  qui représente  $u$  (on dit que  $D$  est une "réduite" de  $u$ ) vérifie les propriétés suivantes :

- les coefficients diagonaux de  $D$  sont exactement les valeurs propres de  $u$ .
- chaque valeur propre est représentée sur la diagonale de  $D$  autant de fois que son ordre de multiplicité.

Il y a donc unicité de la "réduite"  $D$  à l'ordre des éléments près. En revanche, il n'y a pas unicité de la base de diagonalisation (même pas à l'ordre des vecteurs près).

On déduit de la proposition précédente le théorème suivant :

**Théorème 29 (Théorème de diagonalisation)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On note  $\chi_u(X) = \det(XId_E - u)$  son polynôme caractéristique.

(i) Si  $\chi_u$  n'est pas scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors  $u$  n'est pas diagonalisable.

(ii) Si  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors en notant  $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$  (avec les  $\lambda_k$  deux à deux distincts et les  $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$ ), on a les équivalences :

$$\begin{aligned} u \text{ est diagonalisable} &\iff E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u) = E \\ &\iff \sum_{k=1}^p \dim(E_{\lambda_k}(u)) = n \\ &\iff \forall k \in [1; p], \dim(E_{\lambda_k}(u)) = \alpha_k \end{aligned} .$$

Dans ce cas, on obtient une base de diagonalisation de  $u$  en concaténant des bases des sous-espaces propres.

**Remarque**

Interprétation du théorème : les endomorphismes diagonalisables sont ceux qui ont des **sous-espaces propres de dimension maximale** (égale à la multiplicité des valeurs propres). Ainsi, on dispose de "suffisamment de vecteurs propres libres" pour construire une base de  $E$  qui diagonalise  $u$ .

**Preuve**

(i) Le théorème précédent montre que si  $u$  est diagonalisable, alors  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  (c'est un produit de polynômes de degré 1, non nécessairement distincts). Par contraposée, on obtient le point (i).

(ii) Supposons  $\chi_u$  scindé sur  $\mathbb{K}$ , on le note  $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$ , avec les  $\lambda_k$  deux à deux distincts et les  $\alpha_k \in \mathbb{N}^*$ . La proposition précédente montre que

$$u \text{ diagonalisable} \iff E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u) = E.$$

Vu qu'on a toujours  $E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u) \subset E$ , on en déduit que

$$u \text{ diagonalisable} \iff \dim(E_{\lambda_1}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u)) = \dim(E),$$

c'est-à-dire

$$u \text{ diagonalisable} \iff \dim(E_{\lambda_1}(u)) + \cdots + \dim(E_{\lambda_p}(u)) = n.$$

Mais on a aussi  $n = \deg(\chi_u) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$ , donc

$$u \text{ diagonalisable} \iff (\alpha_1 - \dim(E_{\lambda_1}(u))) + \cdots + (\alpha_p - \dim(E_{\lambda_p}(u))) = 0.$$

Puisque tous les termes  $\alpha_k - \dim(E_{\lambda_k}(u))$  sont positifs (d'après le théorème 24), on en déduit que cette somme est nulle si et seulement si chaque terme est nul. D'où :

$$u \text{ diagonalisable} \iff \forall k \in \{1, \dots, p\}, \alpha_k - \dim(E_{\lambda_k}(u)) = 0.$$

**Remarque**

- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , la condition " $\chi_u$  est scindé" est automatique.
- Même si un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  (où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ) a toutes ses valeurs propres réelles, il n'est pas nécessairement diagonalisable !

**Exemple**

Soit l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^3$  défini par :

$$f(x, y, z) = (y + z, -x + 2y + z, -x + y + 2z).$$

1. Montrer que  $f$  est diagonalisable et le diagonaliser.
2. Diagonaliser la matrice  $A$  canoniquement associée à  $f$ .

**Solution :** La matrice de  $f$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$\chi_f(X) = \chi_A(X) = (X - 1)^2(X - 2)$ , donc  $f$  possède une valeur propre double (1) et une valeur propre simple (2).

- Le sous-espace propre  $E_2(f)$  est nécessairement de dimension 1, puisque la valeur propre 2 est simple. On a  $E_2(f) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .
- L'endomorphisme  $f$  est diagonalisable si et seulement si  $\dim(E_1(f)) = 2$  (puisque la valeur propre 1 est de multiplicité 2). C'est le cas car  $E_1(f) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ .  
Donc  $f$  est diagonalisable.
- Les calculs précédents montrent que la famille  $(u_1, u_2, u_3)$  obtenue est une base de  $\mathbb{R}^3$  formée de vecteurs propres pour  $f$ . La matrice de  $f$  dans la base  $(u_1, u_2, u_3)$  est

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Tout ceci montre aussi que la matrice  $A$  est diagonalisable, puisque  $D = P^{-1}AP$ , avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(la matrice de passage de la base canonique vers la base  $(u_1, u_2, u_3)$ ).

**Remarque**

Si  $P^{-1}AP = D$  avec  $D$  diagonale et  $P$  inversible :

- les colonnes de la matrice  $P$  forment une base de diagonalisation de l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$ , noté  $u$  : 
$$\begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ V & \longmapsto & AV \end{cases}$$
  
Cette matrice  $P$  est la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{K}^n$  à la base de vecteurs propres  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ .
- $D$  est la matrice de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Elle est diagonale, et ses éléments diagonaux sont les valeurs propres de  $A$ .

**Exemple**

Montrer que l'endomorphisme  $u : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$  défini par  $u(P) = P + P'$  n'est pas diagonalisable.

**Solution** : La matrice de  $u$  dans la base canonique  $(1, X, X^2)$  est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que  $\chi_u(X) = (X - 1)^3$  :  $u$  possède une valeur propre triple : 1.

Si  $u$  était diagonalisable, on aurait alors  $A$  semblable à  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , donc  $A = P^{-1}I_3P$  avec  $P$  inversible, c'est-à-dire  $A = I_3$ , ce qui est faux. Donc  $u$  n'est pas diagonalisable.

**3) Cas des projecteurs et symétries****Propriété 30 (Diagonalisabilité des projecteurs et symétries)**

- (i) Tout projecteur  $p : E \rightarrow E$  est diagonalisable.  
De plus, si  $p \notin \{0_{\mathcal{L}(E)}, Id_E\}$ , alors  $p$  possède exactement deux sous-espaces propres :  
 $E_0(p) = Ker(p)$  et  $E_1(p) = Ker(p - Id_E) = Im(p)$ .
- (ii) Toute symétrie  $s : E \rightarrow E$  est diagonalisable.  
De plus, si  $s \notin \{Id_E, -Id_E\}$ , alors  $s$  possède exactement deux sous-espaces propres :  
 $E_1(s) = Ker(s - Id_E)$  et  $E_{-1}(s) = Ker(s + Id_E)$ .

**Preuve**

- (i) Si  $p : E \rightarrow E$  est un projecteur, alors en considérant une base  $\mathcal{B}$  adaptée à la somme directe :

$$E = Im(p) \oplus Ker(p) = Ker(p - Id_E) \oplus Ker(p),$$

on a

$$Mat_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où  $r = rg(p) = \dim(Im(p)) \in \{0, \dots, n\}$

- (ii) Si  $s : E \rightarrow E$  est une symétrie, alors en considérant une base  $\mathcal{B}$  adaptée à la somme directe :

$$E = Ker(s - Id_E) \oplus Ker(s + Id_E),$$

on a

$$Mat_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix},$$

où  $r = \dim(Ker(s - Id_E)) \in \{0, \dots, n\}$ .

**Remarque**

Si  $E$  est un espace euclidien, alors les deux sous-espaces propres d'un projecteur orthogonal différent de  $0_{\mathcal{L}(E)}$  et  $Id_E$  (respectivement d'une symétrie orthogonale différente de  $\pm Id_E$ ) sont supplémentaires orthogonaux.

**4) Cas où  $\chi_u$  est scindé à racines simples****Rappel**

On dit qu'un polynôme  $P$  est scindé à racines simples (ou simplement scindé) sur  $\mathbb{K}$  lorsqu'il est scindé sur  $\mathbb{K}$  et toutes ses racines sont de multiplicité 1.

Par exemple,  $X^2 + (1 - i)X - i = (X + 1)(X - i)$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$ , mais pas  $X^3 - 2iX^2 - X = X(X - i)^2$ .

**Propriété 31 (Cas où  $\chi_u$  est scindé à racines simples)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Si  $\chi_u$  est scindé à racines simples sur  $\mathbb{K}$ , alors  $u$  est diagonalisable.

**Preuve**

Dans ce cas,  $u$  possède  $n$  sous-espaces propres, qui sont des droites (puisque  $\forall k \in [1, n]$ ,  $1 \leq \dim(E_{\lambda_k}(u)) \leq \alpha_k = 1$ ). On a donc bien  $\sum_{k=1}^n \dim(E_{\lambda_k}(u)) = n$ , ce qui prouve que  $u$  est diagonalisable.

**Remarque**

Cela revient à dire que si  $u$  possède  $n$  valeurs propres distinctes (avec  $n = \dim(E)$ ), alors  $u$  est diagonalisable.

Et en conséquence immédiate : si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  possède  $n$  valeurs propres distinctes dans  $\mathbb{K}$ , alors  $A$  est diagonalisable.

**ATTENTION !****La réciproque est fautive !**

Par exemple,  $Id_E$  est diagonalisable et pourtant, cet endomorphisme ne possède qu'une valeur propre (1) de multiplicité  $n$  (on a  $\chi_{Id_E}(X) = (X - 1)^n$ ).

**Exemple (Extrait de CCP TSI 2012)**

Montrer que l'endomorphisme  $u : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$  défini par

$$u(P) = (X + 2)P(X) - XP(X + 1)$$

est diagonalisable. **Solution** : Sa matrice dans la base  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$  est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donc  $Sp(u) = Sp(A) = \{-1, 0, 1, 2\}$  (puisque la matrice est triangulaire).

Vu que l'endomorphisme  $u$  possède 4 valeurs propres distinctes (et  $\dim(E) = 4$ ), on en déduit que  $u$  est diagonalisable, et que la matrice  $A$  est semblable à

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

mais aussi à toute matrice diagonale dont la diagonale est une permutation du quadruplet  $(2, 1, 0, -1)$  (il y a donc  $4! = 24$  réduites possibles).

**Exemple**

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  $A$  est-elle diagonalisable dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  ? Dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  ?

**Solution** : On montre que le polynôme caractéristique de  $A$  vaut

$$\chi_A(X) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X - i)(X + i).$$

- Ce polynôme n'est pas scindé sur  $\mathbb{R}$ , donc  $A$  n'est pas diagonalisable dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ .
- Ce polynôme est scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$ , donc  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  et les sous-espaces propres sont quatre droites supplémentaires de  $\mathbb{C}^4$  :

$$E_1(A) \oplus E_{-1}(A) \oplus E_i(A) \oplus E_{-i}(A) = \mathbb{C}^4.$$

**ATTENTION !**

Dans l'exemple précédent, remarquons que la matrice  $A$  est **équivalente en lignes à  $I_4$** , mais **pas semblable à  $I_4$**  !

La matrice  $A$  est semblable (dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ ) à  $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$

## IV Endomorphismes/matrices trigonalisables

$E$  désigne encore un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ .

### 1) Définition

#### Définition 32 (Endomorphisme trigonalisable)

Une endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **trigonalisable** lorsqu'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire.

#### Vocabulaire

**Trigonaliser** l'endomorphisme  $u$  signifie trouver une telle base de  $E$ , appelée **base de trigonalisation** de  $u$ .

#### Remarque

- Tout endomorphisme diagonalisable est trigonalisable (puisque une matrice diagonale est triangulaire), mais la réciproque est fautive.
- Si  $u$  est trigonalisable, on peut toujours se ramener (quitte à permuter les vecteurs de la base) à une matrice **triangulaire supérieure** (ou inférieure, c'est comme on veut).

#### Exemple

Montrer que l'endomorphisme  $u : \begin{cases} \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} ix + (1+i)y \\ iy \end{pmatrix} \end{cases}$  est trigonalisable, mais pas

diagonalisable. **Solution** : En effet, dans la base canonique de  $\mathbb{C}^2$  (notée  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ),

la matrice de  $u$  est

$$A = \begin{pmatrix} i & 1+i \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

elle est triangulaire. Ceci montre que  $u$  est trigonalisable.

Par contre, si  $u$  était diagonalisable, la matrice  $A$  le serait aussi, et puisque  $Sp(A) = \{i\}$ , on aurait  $A$  semblable à  $iI_2$ , ce qui est impossible (puisque on a  $P^{-1}(iI_2)P = iI_2 \neq A$  pour toute matrice  $P$  inversible). Donc  $u$  n'est pas diagonalisable.

#### Définition 33 (Matrice trigonalisable)

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **trigonalisable** lorsqu'elle est semblable à une matrice triangulaire, c'est-à-dire lorsqu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire.

#### Vocabulaire

**Trigonaliser** la matrice  $A$ , c'est déterminer explicitement une matrice inversible  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire. Comme pour la diagonalisation, **les colonnes de  $P$  représentent une base de trigonalisation** de l'endomorphisme  $u : V \mapsto AV$  canoniquement associé à  $A$ .

#### Remarque

- Toute matrice triangulaire est trigonalisable, et la réciproque est fautive.
- Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , alors

$$A \text{ trigonalisable} \iff \text{l'endomorphisme } u : \begin{cases} \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ V \longmapsto AV \end{cases} \text{ est trigonalisable.}$$

- Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  est une quelconque base de  $E$ , alors

$$u \text{ trigonalisable} \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est trigonalisable.}$$



## 2) Théorème de trigonalisation et conséquences

### Théorème 34 (Théorème de trigonalisation)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors :

$u$  est trigonalisable  $\iff$  le polynôme caractéristique  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

#### Preuve

- $\implies$  Si  $u$  est trigonalisable, alors  $u$  se représente par une matrice triangulaire supérieure

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & * & * \\ & \ddots & * \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ dans une certaine base } \mathcal{B}.$$

On a donc  $\chi_u(X) = \det(XI_n - T) = \prod_{k=1}^n (X - a_{k,k}) \in \mathbb{K}[X]$ , ce qui prouve que  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  (attention, pas nécessairement à racines simples!).

- $\impliedby$  On procède par récurrence sur  $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$ .
  - \* Pour  $n = 1$ , le résultat est évident car en dimension 1, tout endomorphisme se représente par une matrice  $1 \times 1$ , qui est évidemment triangulaire!
  - \* Soit  $n \geq 1$ . Supposons qu'en dimension  $n$ , tout endomorphisme ayant son polynôme caractéristique scindé soit trigonalisable, et montrons que ceci reste vrai en dimension  $n + 1$ . Soit donc  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n + 1$ , et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\chi_u$  soit scindé sur  $\mathbb{K}$ . On va montrer que  $u$  est trigonalisable. Puisque  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ ,  $u$  possède au moins une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Notons  $e \in E$  un vecteur propre associé, et complétons  $(e)$  en une base  $\mathcal{B} = (e, e_2, \dots, e_{n+1})$  de  $E$ . La matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est de la forme

$$A = \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & A_1 & \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}), \quad A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Exprimons alors  $\chi_u$  : en développant par rapport à  $C_1$ , on obtient

$$\chi_u(X) = \det(XI_{n+1} - A) = (X - \lambda) \times \det(XI_n - A_1) = (X - \lambda)\chi_{A_1}(X).$$

Puisque  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , son diviseur  $\chi_{A_1}$  est aussi scindé sur  $\mathbb{K}$ . Par hypothèse de récurrence, la matrice  $A_1$  est donc trigonalisable (car elle représente un endomorphisme en dimension  $n$  dont le polynôme caractéristique est scindé).

D'où l'existence d'une matrice  $P_1 \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $P_1^{-1}A_1P_1 = T_1$  soit triangulaire supérieure.

On conclut en posant  $P = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & P_1 & \end{array} \right)$  : on a  $P \in GL_{n+1}(\mathbb{K})$  (puisque  $\det(P) =$

$1 \times \det(P_1) \neq 0$ ), et

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & P_1^{-1} & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|ccc} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & A_1 & \end{array} \right) \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & P_1 & \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & P_1^{-1}A_1P_1 & \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & T_1 & \end{array} \right). \end{aligned}$$

Cette matrice est bien triangulaire supérieure, ce qui montre que  $A$  est trigonalisable, et donc  $u$  aussi.

### Remarque (IMPORTANT)

Si  $u$  est trigonalisable, et si  $T$  est une matrice triangulaire représentant  $u$ , alors

- les éléments diagonaux de  $T$  sont exactement les valeurs propres de  $u$ .
- chaque valeur propre apparaît sur la diagonale de  $T$  autant de fois que sa multiplicité.

Mais à l'inverse de la diagonalisation, la matrice  $T$  n'est pas unique (même à l'ordre des facteurs diagonaux près), à cause des éléments non diagonaux de  $T$ .

### Corollaire 35 (Cas complexe / cas réel)

- (i) Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable.
- (ii) Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , alors tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  ayant toutes ses valeurs propres dans  $\mathbf{R}$  est trigonalisable.

### Preuve

- (i) On a  $\chi_u \in \mathbb{C}[X]$  et  $\chi_u$  non constant, donc  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{C}$ , et on en déduit par le théorème 34 que  $u$  est trigonalisable.
- (ii) Ici,  $\chi_u \in \mathbb{R}[X]$  et par hypothèse, toutes les racines de  $\chi_u$  sont réelles. On a donc la factorisation  $\chi_u(X) = \prod_{\lambda \in \text{sp}(u)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$ , où chaque valeur propre  $\lambda \in \mathbb{R}$  a pour multiplicité  $\alpha_\lambda \in \mathbb{N}^*$ . D'où  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ , ce qui entraîne par le théorème 34 que  $u$  est trigonalisable.

### Corollaire 36 (Trigonalisation des matrices carrées)

- (i) Toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est trigonalisable.
- (ii) Toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , i.e. il existe  $P \in GL_n(\mathbb{C})$  telle que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire (dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ).
- (iii) Toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbf{R}$  est trigonalisable dans  $\mathbf{R}$ , c'est-à-dire qu'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{R})$  telle que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire (dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ).

### Preuve

Il suffit d'appliquer le corollaire précédent à l'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  canoniquement associé à  $A$  :

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ V & \longmapsto & AV \end{cases},$$

et cela montre (i) et (iii). Pour le point (ii), il suffit de considérer  $A$  comme une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , ainsi  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$  et on se ramène à (i).

## 3) Expressions de la trace et du déterminant

### Propriété 37 (Lien entre trace, déterminant et valeurs propres)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

On suppose que  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $u$  (pas nécessairement distinctes, mais comptées avec multiplicité). Alors, on a

$$\text{tr}(u) = \sum_{k=1}^n \lambda_k, \quad \det(u) = \prod_{k=1}^n \lambda_k.$$

### Preuve

Puisque  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , l'endomorphisme  $u$  est trigonalisable, donc il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle  $T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est triangulaire supérieure, avec pour éléments diagonaux  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Donc, par définition de la trace et du déterminant d'un endomorphisme (qui ne dépendent pas de la base de représentation) :

$$\operatorname{tr}(u) = \operatorname{tr}(T) = \sum_{k=1}^n \lambda_k, \quad \det(u) = \det(T) = \prod_{k=1}^n \lambda_k.$$

**Corollaire 38 (Lien entre trace, dét. et valeurs propres d'une matrice)**

Pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,

- (i) La trace de  $A$  est la somme de ses valeurs propres (**comptées avec multiplicité**).
- (ii) Le déterminant de  $A$  est le produit de ses valeurs propres (**comptées avec multiplicité**).

Ces résultats sont aussi valables pour toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ayant toutes ses valeurs propres réelles.

**Preuve**

Evident en raisonnant sur l'endomorphisme canoniquement associé à  $A$  et en appliquant le corollaire précédent.

**ATTENTION !**

Les valeurs propres de multiplicité  $\geq 2$  "comptent plusieurs fois" dans le calcul de la trace et du déterminant.

**Exemple**

En dimension 3, si  $\chi_u(X) = (X - 1)(X - 3)^2$ , alors on a

$$\operatorname{tr}(u) = 1 + 3 + 3 = 7, \quad \det(u) = 1 \times 3 \times 3 = 9.$$

**ATTENTION !**

Dans les cas où  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  possède des valeurs propres complexes non réelles, il faut tenir compte de ces valeurs propres dans le calcul de la trace et du déterminant.

**Exemple (Encore la matrice de rotation)**

On fixe un réel  $\theta$  et on considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ .

On a  $\operatorname{tr}(A) = 1 + 2 \cos(\theta)$ , et

$$\chi_A(X) = (X - 1)(X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1) = (X - 1)(X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta}).$$

Dans  $\mathbb{C}$ , la somme des trois valeurs propres est bien égale à la trace :

$$1 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 1 + 2 \cos(\theta).$$

#### 4) Trigonalisation en dimension 2

**Méthode (Trigonalisation en dimension 2)**

Considérons une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . On suppose que  $A$  est **trigonalisable** dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  mais **non diagonalisable**.

En notant  $u : V \mapsto AV$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^2$  canoniquement associé à  $A$ , on a donc

$$\chi_u(X) = (X - \lambda)^2, \quad \dim(E_\lambda(u)) = 1.$$

- On détermine une base  $(v_1)$  de  $E_\lambda(u)$ . On a donc  $u(v_1) = \lambda v_1$ .
- On complète en une base  $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$  de  $\mathbb{K}^2$ .

La matrice de  $u$  dans  $\mathcal{B}$  est alors de la forme  $T = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ .

Vu que cette matrice est semblable à  $A$ , on a  $\operatorname{tr}(T) = \operatorname{tr}(A) = 2\lambda$ , et donc

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

On a donc trigonalisé  $A$ , puisque  $T$  est triangulaire et semblable à  $A$  : en effet, on a  $T = P^{-1}AP$ , où  $P$  est la matrice de passage dont les colonnes sont les coordonnées de  $v_1$  et  $v_2$  dans la base canonique.

### **ATTENTION !**

$v_1$  est un vecteur propre de  $u$ , mais pas  $v_2$  !

### **Méthode (Choix optimal de $v_2$ )**

On peut "**optimiser**" le choix du vecteur  $v_2$ , afin d'obtenir une base  $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$  dans laquelle la matrice de  $u$  est

$$T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Il suffit pour cela de prendre  $v_2$  tel que

$$u(v_2) = v_1 + \lambda v_2$$

(et c'est toujours possible, c'est l'objet d'une théorie plus poussée appelée la "réduction de Jordan"). En pratique, le calcul d'un tel vecteur  $v_2$  est simple (système linéaire avec second membre à résoudre) : en notant  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  les coordonnées de  $v_2$  dans la base canonique de  $\mathbb{K}^2$ , et  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  celles de  $v_1$ , on a

$$u(v_2) = v_1 + \lambda v_2 \iff (u - \lambda Id)(v_2) = v_1 \iff (A - \lambda I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

## **5) Trigonalisation en dimension 3**

Considérons une matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ . On suppose que  $A$  est **trigonalisable** dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$  mais **non diagonalisable**.

En notant  $u : V \mapsto AV$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^3$  canoniquement associé à  $A$ , on a donc deux cas possibles :

- $\chi_u(X) = (X - \alpha)(X - \beta)^2$  avec  $\alpha \neq \beta$ , et  $\dim(E_\alpha(u)) = \dim(E_\beta(u)) = 1$ .
- $\chi_u(X) = (X - \alpha)^3$  avec  $\dim(E_\alpha(u)) = 1$  ou 2.

### **a) Trigonalisation avec une valeur propre simple et une double**

On suppose que  $\chi_u(X) = (X - \alpha)(X - \beta)^2$  avec  $\alpha \neq \beta$  et les sous-espaces propres vérifient :

$$\dim(E_\alpha(u)) = \dim(E_\beta(u)) = 1.$$

### **Méthode**

- On détermine une base  $(v_1)$  de  $E_\alpha(u)$  et une base  $(v_2)$  de  $E_\beta(u)$ .  
Puisque les deux espaces propres sont en somme directe,  $(v_1, v_2)$  est une famille libre de  $\mathbb{K}^3$ .
- On peut la compléter en une base  $\mathcal{B} := (v_1, v_2, v_3)$  de  $\mathbb{K}^3$ .  
Puisque  $u(v_1) = \alpha v_1$  et  $u(v_2) = \beta v_2$ , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

- Pour des raisons de trace ( $\text{tr}(T) = \text{tr}(A) = \alpha + 2\beta$ ), on a nécessairement :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & * \\ 0 & \beta & * \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

On a bien trigonalisé  $A$ , puisque  $T$  est semblable à  $A$  et que  $T$  est triangulaire.

**Méthode (Choix optimal de  $v_3$ )**

On peut en fait trigonaliser "mieux que ça" et montrer que  $A$  est semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Pour cela, il suffit de choisir  $v_3$  tel que

$$u(v_3) = v_2 + \beta v_3,$$

plutôt que de compléter  $(v_1, v_2)$  "au hasard", et la théorie assure que c'est toujours possible dans ce cas.

**b) Trigonalisation avec une valeur propre triple**

La situation est plus complexe.

On suppose que  $\chi_u(X) = (X - \alpha)^3$  avec  $\dim(E_\alpha(u)) \in \{1; 2\}$ .

**Méthode**

- Si  $\dim(E_\alpha(u)) = 2$ , alors la situation est similaire au cas a) : on ne dispose que de **deux** vecteurs propres libres  $(v_1, v_2)$ .

On montre que  $A$  est semblable à  $T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ , en construisant une base  $(v_1, v_2, v_3)$  telle

$$\text{que } \begin{cases} u(v_1) = \alpha v_1 \\ u(v_2) = \alpha v_2 \\ u(v_3) = v_2 + \alpha v_3 \end{cases}.$$

- Si  $\dim(E_\alpha(u)) = 1$ , alors c'est encore plus compliqué : on ne dispose que d'**un seul** vecteur propre  $v_1$  libre (puisque  $E_\alpha$  est une droite, tous les vecteurs propres sont colinéaires entre eux).

Cette fois-ci, on montre que  $A$  est semblable à  $T = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ , en construisant une base

$$(v_1, v_2, v_3) \text{ telle que } \begin{cases} u(v_1) = \alpha v_1 \\ u(v_2) = v_1 + \alpha v_2 \\ u(v_3) = v_2 + \alpha v_3 \end{cases}.$$

**ATTENTION !**

Dans chacun des deux cas, la construction d'une telle base peut être subtile (il ne suffit pas de compléter "au hasard" la famille libre de vecteurs propres).

**Remarque**

La trigonalisation explicite d'une matrice quelconque n'est pas exigible dans le cadre du programme, mais il faut savoir se débrouiller en "petite" dimension.

## V Endomorphismes/matrices nilpotents

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec  $\mathbb{K}$  un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

### Notation

On rappelle que  $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre (non commutative dès que  $\dim(E) \geq 2$ ). Classiquement, on notera la composition des endomorphismes de la façon suivante :

$$\forall u \in \mathcal{L}(E), \forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k = \underbrace{u \circ u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$$

avec la convention  $u^0 = Id_E$ .

### Définition 39 (Endomorphisme nilpotent, indice de nilpotence)

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est **nilpotent** lorsqu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

Dans ce cas, on appelle **indice de nilpotence de  $u$**  le plus petit entier  $k \geq 1$  tel que  $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ .

### Définition 40 (Matrice nilpotente, indice de nilpotence)

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

On dit que  $A$  est **nilpotente** lorsqu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ .

Dans ce cas, on appelle **indice de nilpotence de  $A$**  le plus petit entier  $k \geq 1$  tel que  $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ .

### Remarque

Si  $E$  est de dimension finie, alors pour toute base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on a

$$u \text{ nilpotent d'indice } p \iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ nilpotente d'indice } p.$$

### Théorème 41 (Caractérisation en dimension finie des endomorphismes nilpotents)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Alors,  $u$  est nilpotent si et seulement si ( $u$  est trigonalisable et  $Sp(u) = \{0\}$ ).

### Preuve

Notons  $n = \dim(E) \in \mathbb{N}^*$ .

$\implies$  Supposons que  $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ .

Fixons une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  et notons  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . On va montrer que  $A$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , en raisonnant avec les valeurs propres complexes de  $A$ .

Soit  $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$ . En notant  $V \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$  un vecteur propre associé à  $\lambda$ , on a

$$A^p V = A^{p-1}(AV) = A^{p-1}(\lambda V) = \lambda A^{p-1} V,$$

donc par récurrence immédiate :

$$A^p V = \lambda^p V = 0,$$

(puisque  $A^p = 0$ ), ce qui entraîne  $\lambda = 0$  (vu que  $V$  est non nul). D'où  $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \{0\}$ , puis  $Sp_{\mathbb{C}}(A) = Sp_{\mathbb{K}}(A) = \{0\}$  (puisque le spectre complexe n'est jamais vide). Le polynôme caractéristique de  $A$  est donc  $\chi_A = X^n$ . Ce polynôme étant scindé sur  $\mathbb{K}$ , la matrice  $A$  est trigonalisable **dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$** , donc  $u$  est trigonalisable et  $Sp(u) = Sp_{\mathbb{K}}(A) = \{0\}$ .

$\impliedby$  Si  $u$  est trigonalisable avec  $Sp(u) = \{0\}$ , alors il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale (la seule valeur propre étant 0) :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Par lecture des colonnes, on en déduit que

$$u(e_i) = 0, \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}, \quad u(e_i) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{i-1}),$$

donc par récurrence :

$$\forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \quad \text{Im}(u^k) = \text{Vect}(u^k(e_1), \dots, u^k(e_n)) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-k}).$$

Donc  $\text{Im}(u^{n-1}) \subset \text{Vect}(e_1)$ , et  $\text{Im}(u^n) \subset \{0\}$ , ce qui montre que  $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et donc  $u$  est nilpotent.

### Remarque

On peut reformuler ce résultat de plusieurs façons :

- $u$  est nilpotent ssi il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.
- Une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est nilpotente ssi elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale.

### Corollaire 42 (Indice de nilpotence en dimension finie)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $u$  est nilpotent, alors son indice de nilpotence est inférieur ou égal à  $n = \dim(E)$ .

### Preuve

La preuve du théorème précédent montre que si  $u$  est nilpotent, alors  $u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$  (puisqu'on peut représenter  $u$  par une matrice triangulaire supérieure avec des 0 sur la diagonale dans une certaine base).

### Remarque

On a donc également l'équivalence : ( $u$  nilpotent  $\iff u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ), où  $n = \dim(E)$ .