CH07 : Topologie des espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, $(E, \| \cdot \|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Notions générales de topologie

Pour tout $a \in E$ et pour tout réel $r > 0$, on rappelle que $B(a, r)$ (resp. $B_f(a, r)$) désigne la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon r.
Egalement, on notera $d(a, x) = \|x - a\|$ la distance entre deux points a, x de E.

1) Voisinages

Définition 1 (Voisinage d'un point)
Soit $a \in E$ et soit $A \subset E$. On dit que A est un **voisinage** *de a s'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.*

Lemme 2 (Reformulation avec des boules fermées)
Soit $a \in E$ et soit $A \subset E$.
A est un voisinage de $a \iff$ il existe un réel $r > 0$ tel que $B_f(a, r) \subset A$.

2) Ouverts, fermés

Définition 3 (Partie ouverte)
Une partie $U \subset E$ est dite **ouverte** *si pour tout $a \in U$, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.*

Définition 4 (Partie fermée)
Une partie $F \subset E$ est dite **fermée** *si son complémentaire $E \setminus F$ est une partie ouverte de E.*

Vocabulaire
Une partie ouverte (resp. fermée) de E est aussi appelée "un ouvert de E" (resp. "un fermé de E").

Propriété 5 (Stabilité par réunion / intersection)
- *(i) Toute réunion de parties ouvertes (même infinie) est ouverte.*
- *(ii) Toute intersection* **finie** *de parties ouvertes est ouverte.*
- *(iii) Toute intersection de parties fermées (même infinie) est fermée.*
- *(iv) Toute réunion* **finie** *de parties fermées est fermée.*

Propriété 6 (Topologie des boules, sphères, singletons)
- *(i) Toute boule ouverte est une partie ouverte de E.*
- *(ii) Toute boule fermée est une partie fermée de E.*
- *(iii) Toute sphère est une partie fermée de E.*
- *(iv) Tout singleton $\{a\}$ est une partie fermée de E.*

Propriété 7 (Produit fini d'ouverts, de fermés)
Soit $(E_1, N_1), \cdots, (E_n, N_n)$ des $\mathbb{K}$-evn. On munit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ de la norme

$$N : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & N(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} N_i(x_i) \end{array} \right. .$$

- *(i) Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, U_i est un ouvert de (E_i, N_i) alors le produit $U = U_1 \times \cdots \times U_n$ est un ouvert de (E, N).*
- *(ii) Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, F_i est un fermé de (E_i, N_i) alors le produit $F = F_1 \times \cdots \times F_n$ est un fermé de (E, N).*

3) Intérieur, adhérence, frontière

Définition 8 (Point intérieur à une partie)
Soit $A \subset E$ et soit $a \in E$. On dit que a est **intérieur** *à A lorsque A est un voisinage de a, c'est-à-dire lorsqu'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset A$.*

Notation
Pour toute partie $A \subset E$, on notera $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A, appelé **l'intérieur** de A.

Propriété 9 (Caractérisation de l'intérieur en tant qu'ouvert)
Soit $A \subset E$. Alors, $\mathring{A}$ est la plus grande partie ouverte contenue dans A.

Corollaire 10 (Caractérisation des ouverts par l'intérieur)
Une partie A est ouverte si et seulement si $\mathring{A} = A$.

Définition 11 (Point adhérent à une partie)
Soit $A \subset E$ et soit $a \in E$. On dit que a est **adhérent** *à A lorsque pour tout réel $r > 0$, la boule $B(a,r)$ contient au moins un élément de A (i.e $\forall r > 0,\ B(a,r) \cap A \neq \emptyset$).*

Notation
Pour toute partie $A \subset E$, on notera $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A, appelé **l'adhérence** de A.

Propriété 12 (Complémentaire et intérieur/adhérence)

Pour toute partie $A \subset E$, on a $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}$, ainsi que $E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A}$.

Propriété 13 (Caractérisation de l'adhérence en tant que fermé)
Soit $A \subset E$. Alors $\overline{A}$ est la plus petite partie fermée contenant A.

Corollaire 14 (Caractérisation des fermés par l'adhérence)
Une partie A est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.

Définition 15 (Frontière d'une partie)
Soit $A \subset E$. On appelle **frontière** *de A (ou* **bord** *de A) la partie $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.*

Notation
Parfois, la frontière de A est notée ∂A.

Propriété 16 (Fermeture de la frontière)
Pour toute partie $A \subset E$, $Fr(A)$ est fermée.

4) Caractérisations séquentielles

Théorème 17 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence)
Soit $A \subset E$ et soit $a \in E$. Alors :
$a \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a.

Corollaire 18 (Adhérence d'une boule ouverte)
Pour tout $a \in E$ et pour tout $r > 0$, on a $\overline{B(a,r)} = B_f(a,r)$.

Notation
Une boule fermée pourra donc se noter $\overline{B(a,r)}$ plutôt que $B_f(a,r)$ sans ambiguïté.

Corollaire 19 (Caractérisation séquentielle des fermés)
Une partie $A \subset E$ est fermée si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in E$, on a $\ell \in A$.

5) Densité

Définition 20 (Partie dense)
Soit $A \subset E$. On dit que A **est dense** *dans E lorsque $\overline{A} = E$.*

6) Topologie relative à une partie

Examinons maintenant ce qu'il se passe lorsqu'on se restreint à une partie $X \subset E$.
Ces notions seront utiles lorsque l'on abordera l'étude de la continuité d'une fonction définie seulement sur X (et non pas sur E tout entier).

Définition 21 (Voisinage relatif à X)
Etant donné $X \subset E$ et $a \in \overline{X}$, on appelle **voisinage de a relatif à X** *toute partie de la forme $V \cap X$, où V est un voisinage de a.*

Propriété 22 (Caractérisation des voisinages relatifs avec les boules)
Soit $X \subset E$, $A \subset X$, et $a \in \overline{X}$.
A est un voisinage de a relatif à X si et seulement si il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap X \subset A$.

Définition 23 (Ouvert relatif à X)
Etant donné $X \subset E$, on appelle **ouvert relatif à X** *toute partie de E de la forme $U \cap X$, avec U une partie ouverte de E.*

Propriété 24 (Caractérisation des ouverts relatifs avec les voisinages relatifs)
Soit $X \subset E$ et $A \subset X$. Alors A est un ouvert relatif à X si et seulement si A est un voisinage relatif à X de chacun de ses points.

Définition 25 (Fermé relatif à X)
Etant donné $X \subset E$, on appelle **fermé relatif à X** *toute partie de E de la forme $F \cap X$, avec F une partie fermée de E.*

Propriété 26 (Caractérisations des fermés relatifs à X)
Soit $X \subset E$ et $A \subset X$. Alors on a équivalence entre :

(i) A est un fermé relatif à X ;

(ii) pour toute suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in \boldsymbol{X}$, on a $\ell \in A$;

(iii) le complémentaire de A **dans X** *est un ouvert relatif à X.*

7) Invariance des notions topologiques par des normes équivalentes

Théorème 27 (Voisinages, ouverts, fermés pour des normes équivalentes)
Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors les deux espaces vectoriels normés (E, N_1), (E, N_2) possèdent les mêmes voisinages, les mêmes ouverts et les mêmes fermés.

II Limites et continuité

Dans cette section, $(E, \| \ . \ \|_E)$ et $(F, \| \ . \ \|_F)$ désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On va considérer des applications définies sur une partie $X \subset E$ et à valeurs dans F.

Lorsque E et/ou F est égal à $\mathbb{K}$, on le munit naturellement de la valeur absolue / du module.

Vocabulaire ("Au voisinage de ...")
Etant donné une propriété $\mathcal{P}$, une fonction $f : X \subset E \to F$ et un point $a \in \overline{X}$ (adhérent à X), on dira que **f possède la propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de a** s'il existe un voisinage V de a relatif à X tel que la restriction $f_{|V} : V \to F$ possède la propriété $\mathcal{P}$.
Sans perte de généralité, on peut supposer V de la forme $V = B(a, r) \cap X$.

1) Limite d'une fonction en un point

Définition 28 (Limite en un point)
Soit $X \subset E$, $f : X \to F$ et $a \in \overline{X}$. On dit que **f possède une limite en a** *lorsqu'il existe $\ell \in F$ tel que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X,\ \|x - a\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que **$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a** *et on note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ ou encore $f \underset{a}{\to} \ell$.*

Lemme 29 (Reformulation de la notion de limite avec des inégalités strictes)
Soit $X \subset E$, $f : X \to F$, $a \in \overline{X}$ et $\ell \in F$. Alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \left(\forall \varepsilon' > 0,\ \exists \delta' > 0,\ \forall x \in X,\ \|x - a\|_E < \delta' \implies \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon'\right).$$

Théorème 30 (Caractérisation séquentielle de la limite)
Soient $X \subset E$, $f : X \to F$, $a \in \overline{X}$ et $\ell \in F$. Alors :
$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, on a $\left(x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \implies f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell\right)$.

Propriété 31 (Unicité de la limite d'une fonction)
Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ et si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell'$, alors $\ell = \ell'$.
On dit alors que ℓ est la **limite** *de f en a et on note $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, ou $\ell = \lim\limits_{a} f$.*

2) Opérations sur les limites

Propriété 32 (Limite d'une fonction à valeurs dans un espace produit)
On considère des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés $(F_1, N_1), \cdots, (F_p, N_p)$ et on munit l'espace produit $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ de la norme $N : F \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$N(y_1, \cdots, y_p) = \max(N_1(y_1), \cdots, N_p(y_p)).$$

Soit $f : X \subset E \to F$, $a \in \overline{X}$ et $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_p) \in F$.
Notons $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_p(x))$ pour tout $x \in E$. Alors, on a :

$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff \forall i \in \{1, \cdots, p\},\ f_i(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell_i,$$

Vocabulaire
Les applications $f_1, \cdots, f_p$ sont appelées les **composantes** de f ou encore les **fonctions coordonnées** de f.

Propriété 33 (Opérations algébriques sur les limites de fonctions)
Soit $X \subset E$, $a \in \overline{X}$, $f : X \to F$ et $g : X \to F$. On suppose que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in F$ et $g \underset{a}{\longrightarrow} \ell' \in F$.

(i) On a $f + g \underset{a}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda f \underset{a}{\longrightarrow} \lambda \ell$.

Propriété 34 (Limite d'un produit externe)
Soit $X \subset E$, $a \in \overline{X}$, $\alpha : X \to \mathbb{K}$ et $f : X \to F$. On suppose que $\alpha \underset{a}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{K}$ et $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in F$. Alors $\alpha f \underset{a}{\longrightarrow} \lambda \ell \in F$.

Propriété 35 (Limite d'un inverse scalaire)
Soit $X \subset E$, $a \in \overline{X}$, $f : X \to \mathbb{K}$. On suppose que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K}^*$.
Alors f ne s'annule pas au voisinage de a, et $\frac{1}{f} \underset{a}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}$.

Théorème 36 (Limite d'une composée)
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, Soit $f : X \subset E \to F$ et $g : Y \subset F \to G$ tel que $f(X) \subset Y$, et soit $a \in \overline{X}$. Si $f \underset{a}{\longrightarrow} b \in F$ et si $g \underset{b}{\longrightarrow} \ell \in G$, alors $g \circ f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

3) Extension : limite à l'infini, limite infinie

Définition 37 (Limite lorsque $\|x\| \to +\infty$)
Soit X une partie non bornée de E, $f : X \to F$ et $\ell \in F$.
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in X,\ \|x\|_E \geq R \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 38 (Limite lorsque $x \to \pm\infty$)
On suppose ici que $(E, \| \ . \ \|) = (\mathbb{R}, | \ . \ |)$ et $(F, \| \ . \ \|)$ est un evn quelconque.
Etant donné $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to F$ et $\ell \in F$:

(i) Si X n'est pas majorée, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in X,\ x \geq R \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$.

(ii) Si X n'est pas minorée, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in X,\ x \leq -R \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 39 (Limite infinie d'une fonction réelle)
On suppose ici que $(E, \| \ . \ \|)$ est un evn quelconque et $(F, \| \ . \ \|) = (\mathbb{R}, | \ . \ |)$.
Etant donné $X \subset E$, $a \in \overline{X}$ et $f : X \to \mathbb{R}$:

(i) On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall R > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X,\ \|x - a\|_E \leq \delta \implies f(x) \geq R.$$

(ii) On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall R > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X,\ \|x - a\|_E \leq \delta \implies f(x) \leq -R.$$

4) Fonctions continues

Définition 40 (Continuité en un point)
Soit $X \subset E$, $f : X \to F$ et $a \in X$. On dit que f est **continue en a** *lorsque $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$, c'est-à-dire :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X,\ \|x - a\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon.$$

Théorème 41 (Caractérisation séquentielle de la continuité)
Soit $f : X \subset E \to F$, $a \in X$. Alors :
f est continue en a ssi pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, on a $(x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a \implies f(x_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(a))$.

Définition 42 (Continuité globale)
Soit $X \subset E$. On dit qu'une application $f : X \to F$ est **continue** *lorsqu'elle est continue en tout point $a \in X$.*

Notation
Pour toute partie $X \subset E$, on notera $\mathcal{C}^0(X, F)$ l'ensemble des fonctions continues $X \to F$.

Propriété 43 (Coïncidence sur une partie dense)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(E, F)$ et $g \in \mathcal{C}^0(E, F)$.
Si f et g sont égales sur une partie X dense dans E, alors $f = g$.

Théorème 44 (Opérations algébriques sur les fonctions continues)
Soit $X \subset E$.

(i) $\mathcal{C}^0(X, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^X.

(ii) Si $F = \mathbb{K}$, alors $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^X$.

Propriété 45 (Continuité et produit externe)
Soit $X \subset E$. Si $\alpha \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{K})$ et si $f \in \mathcal{C}^0(X, F)$, alors $\alpha f \in \mathcal{C}^0(X, F)$.

Théorème 46 (Composition de fonctions continues)
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, soit $X \subset E$, $Y \subset F$. Si $f \in \mathcal{C}^0(X, F)$, $g \in \mathcal{C}^0(Y, G)$ et $f(X) \subset Y$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(X, G)$.

5) Caractérisation ensembliste de la continuité

Théorème 47 (Caractérisation de la continuité sur X par les images réciproques des ouverts / fermés)
Soit $X \subset E$ et $f : X \to F$. Alors, on a équivalence entre :

(i) f est continue ;

(ii) pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif à X ;

(iii) pour tout fermé Y de F, $f^{-1}(Y)$ est un fermé relatif à X.

Corollaire 48 (Caractérisation de la continuité sur E par les images réciproques des ouverts / fermés)
Soit $f : E \to F$. Alors, on a équivalence entre :

(i) f est continue ;

(ii) pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E ;

(iii) pour tout fermé Y de F, $f^{-1}(Y)$ est un fermé de E.

III Continuités spécifiques

$(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ désignent toujours deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, non nuls.

1) Fonctions uniformément continues, fonctions lipschitziennes

Définition 49 (Continuité uniforme)
Soit $X \subset E$ et $f : X \to F$. On dit que f est **uniformément continue** *lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x, y) \in X^2,\ \|x - y\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Définition 50 (Caractère lipschitzien)
Soit $X \subset E$ et $f : X \to F$. On dit que f est **lipschitzienne** *lorsque :*

$$\exists K \geq 0,\ \forall (x, y) \in X^2,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq K\|x - y\|_E.$$

Propriété 51 (Liens entre les différentes continuités)
f lipschitzienne $\implies$ f uniformément continue $\implies$ f continue .

2) Continuité des applications linéaires

Notation
On notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires $E \to F$.
On notera également $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues $E \to F$.
On rappelle que $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.
Vu que $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F) \cap \mathcal{C}^0(E, F)$, cet ensemble est également un sous-espace vectoriel de F^E, et on a $\mathcal{L}_c(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$.

Théorème 52 (Caractérisation de la continuité des applications linéaires)
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors il y a **équivalence** *entre :*

(i) *u est continue en 0_E ;*
(ii) *u est continue ;*
(iii) *u est uniformément continue ;*
(iv) *u est lipschitzienne ;*
(v) $\exists C \geq 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$.

3) Normes subordonnées

Définition 53 (Norme subordonnée)
Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$. On pose

$$|||u||| = \sup_{x \in E \setminus \{0_E\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

On dit que $|||u|||$ est la **norme subordonnée** *(ou* **norme d'opérateur***, ou encore* **norme triple***) de u, associée aux normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$. On la note aussi $\|u\|_{op}$.*

Théorème 54 (Propriétés d'une norme subordonnée)
On dispose des propriétés suivantes :

(i) *Pour tout* $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ *:*

$$|\!|\!| u |\!|\!| = \min\{C \geq 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E\}.$$

En particulier, on a $\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq |\!|\!| u |\!|\!|\ \|x\|_E$.

(ii) $|\!|\!| . |\!|\!|$ *est une norme sur* $\mathcal{L}_c(E, F)$.

(iii) $|\!|\!| . |\!|\!|$ *est sous-multiplicative : si* $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$ *et* $v \in \mathcal{L}_c(F, G)$ *(où* G *est un troisième evn), alors*

$$|\!|\!| v \circ u |\!|\!| \leq |\!|\!| v |\!|\!|\ |\!|\!| u |\!|\!|.$$

En particulier, $|\!|\!| . |\!|\!|$ *est une norme sous-multiplicative sur la* $\mathbb{K}$*-algèbre* $\mathcal{L}_c(E)$.

(iv) *On a les égalités :*

$$|\!|\!| u |\!|\!| = \sup_{x \in B_f(0,1)\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in B_f(0,1)} \|u(x)\|_F = \sup_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|_F,$$

où $B_f(0,1)$ *désigne la boule unité fermée de* E *et* $S(0,1)$ *la sphère unité de* E.

4) Continuité des applications multilinéaires

Théorème 55 (Caractérisation de la continuité des applications bilinéaires)
Soient E, F, G *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés et* $b : E \times F \to G$ *une application bilinéaire. On munit l'espace produit* $E \times F$ *de la norme :*

$$\|(x, y)\|_{E\times F} = \max(\|x\|_E, \|y\|_F).$$

Alors il y a **équivalence** *entre :*

(i) b *est continue ;*

(ii) $\exists C \geq 0,\ \forall (x, y) \in E \times F, \quad \|b(x, y)\|_G \leq C\|x\|_E\|y\|_F$.

Ce résultat se généralise aux applications multilinéaires :

Théorème 56 (Caractérisation de la continuité des applications multilinéaires)
Soient $E_1, \cdots, E_n, F$ *des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés et* $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ *une application multilinéaire. On munit l'espace produit* $E_1 \times \cdots \times E_n$ *de la norme :*

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_{E_1\times\cdots\times E_n} = \max_{1\leq i\leq n}(\|x_i\|_{E_i}).$$

Alors il y a **équivalence** *entre :*

(i) f *est continue ;*

(ii) $\exists C \geq 0,\ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \quad \|f(x_1, \cdots, x_n)\|_F \leq C\|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_n\|_{E_n}$.

IV Compacité

$(E, \| \cdot \|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1) Définition et premières propriétés

Définition 57 (Partie compacte)
Une partie $A \subset E$ est dite **compacte** *lorsque toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ possède une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge dans A.*

Vocabulaire
On dit aussi que A est "un compact" de E.

Propriété 58 (Propriétés topologiques d'une partie compacte)
Si A est compacte, alors A est fermée et bornée dans E.

Propriété 59 (Un fermé d'un compact est compact)
Soit F une partie fermée de E, et A une partie compacte de E. Si $F \subset A$, alors F est compacte.

Théorème 60 (Compacité et valeurs d'adhérence)
Soit A une partie compacte de E, et (u_n) une suite de $A^{\mathbb{N}}$.
Alors, (u_n) converge si et seulement si (u_n) possède une seule valeur d'adhérence.

Théorème 61 (Produit fini de compacts)
Si $A_1, \cdots, A_p$ sont des parties compactes de $E_1, \cdots, E_p$ (des $\mathbb{K}$-evn) respectivement, alors le produit $A_1 \times \cdots \times A_p$ est une partie compacte de l'espace normé produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ (muni de la norme usuelle).

2) Compacité et continuité

Théorème 62 (Image continue d'un compact)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evn.
Soit A une partie compacte de E et soit $f : A \to F$. Si f est continue, alors l'image $f(A)$ est compacte.

Théorème 63 (Théorème des bornes atteintes)
Soit A une partie compacte et non vide de E, et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $(a, b) \in A^2$ tels que

$$f(a) = \inf_{x \in A} f(x), \qquad f(b) = \sup_{x \in A} f(x).$$

Théorème 64 (Théorème de Heine)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evn, soit $A \subset E$ et $f : A \to F$.
Si A est compacte et f est continue, alors f est uniformément continue.

3) Parties compactes de $(\mathbb{K}, |.|)$

Rappelons le théorème suivant, vu en MP2I :

Théorème 65 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) est bornée, alors (u_n) possède une suite extraite convergente dans $\mathbb{K}$.

Corollaire 66 (Caractérisation des parties compactes de $\mathbb{K}$)
Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{K}, |.|)$ une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

V Connexité par arcs

$(E, \| \cdot \|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1) Chemins

Définition 67 (Chemin tracé dans une partie)
Etant donnée une partie $A \subset E$, on appelle **chemin dans A** *(ou* **arc dans A***) toute application continue $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $\forall t \in [0,1], \gamma(t) \in A$.*
Etant donnés deux points $(x,y) \in A^2$, on appelle **chemin dans A de x vers y** *toute chemin dans A tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

Propriété 68 (Relation d'équivalence associée aux chemins)
Soit $A \subset E$. On définit sur A la relation binaire suivante :

$$\forall (x,y) \in A^2, \qquad x\mathcal{R}y \iff \text{il existe un chemin dans } A \text{ de } x \text{ vers } y.$$

Cette relation est une relation d'équivalence sur A.

Définition 69 (Composantes connexes par arcs d'une partie)
Soit $A \subset E$. Les classes d'équivalences de la relation $\mathcal{R}$ précédemment définie s'appellent les **composantes connexes par arcs** *de A.*

Définition 70 (Partie connexe par arcs)
Une partie $A \subset E$ est dite **connexe par arcs** *lorsque pour tout $(x,y) \in A^2$, il existe un chemin dans A de x vers y.*

2) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 71 (Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$)
Dans $\mathbb{R}$, une partie A est connexe par arcs si et seulement si c'est un intervalle.

Théorème 72 (Image continue d'une partie connexe par arcs)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evn, soit $A \subset E$ et $f : A \to F$.
Si A est connexe par arcs et f continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs dans F.

Théorème 73 (Théorème des valeurs intermédiaires généralisé)
Soit $A \subset E$ une partie connexe par arcs, et $f : A \to \mathbb{R}$ continue.
Pour tout $(a,b) \in A^2$ et pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in A$ tel que $f(c) = \lambda$.

VI Topologie en dimension finie

1) Equivalence des normes

Lemme 74 (Isomorphisme isométrique entre E et $\mathbb{K}^n$)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
Alors :

(i) L'application $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to E$ définie par

$$\varphi_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

est un isomorphisme linéaire, et l'isomorphisme réciproque $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} : E \to \mathbb{K}^n$ associe à un vecteur $x \in E$ ses coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

(ii) L'application $\| \,.\, \|_{\infty,\mathcal{B}} : E \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\|x\|_{\infty,\mathcal{B}} = \|\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(x)\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

est une norme sur E.

Ainsi, $\varphi_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme isométrique (qui conserve la norme) entre les deux espaces normés $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ et $(E, \|.\|_{\infty,\mathcal{B}})$.

Théorème 75 (Equivalence des normes en dimension finie)
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

2) Conséquences

Corollaire 76 (Invariance des notions topologiques en dimension finie)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Alors :

(i) Le fait qu'une partie $A \subset E$ soit bornée, ouverte, fermée, compacte, connexe par arcs ne dépend pas du choix de la norme sur E.

(ii) Le fait qu'une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ soit bornée, convergente, ne dépend pas du choix de la norme sur E.

(iii) Si F est aussi un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, le fait qu'une application $f : X \subset E \to F$ soit continue ne dépend pas du choix des normes sur E et F.

Corollaire 77 (Convergence des suites par coordonnées)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_k) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons

$$u_k = u_{k,1} e_1 + \cdots + u_{k,n} e_n$$

la décomposition de u_k dans la base $\mathcal{B}$.
Alors, la suite (u_k) converge dans E si et seulement si les suites coordonnées $(u_{k,i})$ $(1 \leq i \leq n)$ convergent dans $\mathbb{K}$, et dans ce cas, on a

$$\lim_{k \to +\infty} u_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\lim_{k \to +\infty} u_{k,i} \right) e_i.$$

Corollaire 78 (Limite d'une fonction par coordonnées)
Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B}_F = (e_1, \cdots, e_p)$.
On considère une fonction $f : X \subset E \to F$, et un point $a \in \overline{X}$. Pour tout $x \in X$, on note

$$f(x) = f_1(x)e_1 + \cdots + f_p(x)e_p$$

la décomposition du vecteur $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.
Alors f possède une limite lorsque $x \to a$ si et seulement si les fonctions coordonnées $f_i : X \subset E \to \mathbb{K}$ $(1 \leq i \leq p)$ possèdent une limite lorsque $x \to a$, et dans ce cas, on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \sum_{i=1}^{p} \left(\lim_{x \to a} f_i(x) \right) e_i.$$

3) Caractérisation des parties compactes et conséquences

Théorème 79 (Caractérisation des parties compactes en dimension finie)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et soit $A \subset E$.
A est compacte si et seulement si A est fermée et bornée.

Corollaire 80 (Suites bornées et valeurs d'adhérence en dimension finie)
Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie possède au moins une valeur d'adhérence, et elle converge si et seulement si cette valeur d'adhérence est unique.

Corollaire 81 (Topologie des sev de dimension finie)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé.

4) Continuité en dimension finie

Théorème 82 (Continuité des applications linéaires en dimension finie)
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $u : E \to F$ est continue.

Définition 83 (Application polynomiale sur $\mathbb{K}^n$)
On dit qu'une application $p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est **polynomiale** *si elle est combinaison linéaire de fonctions du type $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ (appelées* **monômes***), avec les $\alpha_i \in \mathbb{N}$.*

Vocabulaire
On dit aussi "fonction polynôme".

Théorème 84 (Continuité des applications polynomiales de $\mathbb{K}^n$)
Toute application polynomiale $p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est continue.

Théorème 85 (Continuité des applications polynomiales en dimension finie)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors toute application $p : E \to \mathbb{K}$ polynomiale en les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est continue.

Théorème 86 (Continuité des applications bilinéaires en dimension finie)
Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Si E et F sont de dimension finie, alors toute application bilinéaire $b : E \times F \to G$ est continue.

Théorème 87 (Continuité des applications multilinéaires en dimension finie)
Soient $E_1, \cdots, E_n, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Si $E_1, \cdots, E_n$ sont de dimension finie, alors toute application multilinéaire $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ est continue.

Terminons par une liste (non exhaustive) d'exemples classiques.