CH07 : Topologie des espaces vectoriels normés

Table des matières

Dans tout ce chapitre, $(E, \| \, . \, \|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Notions générales de topologie

Pour tout $a \in E$ et pour tout réel $r > 0$, on rappelle que $B(a, r)$ (resp. $B_f(a, r)$) désigne la boule ouverte (resp. fermée) de centre a et de rayon r.
Egalement, on notera $d(a, x) = \|x - a\|$ la distance entre deux points a, x de E.

1) Voisinages

Définition 1 (Voisinage d'un point)
Soit $a \in E$ et soit $A \subset E$. On dit que A est un **voisinage** *de a s'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.*

ATTENTION !
Si A est un voisinage de a, alors $a \in A$ (car $a \in B(a, r)$), mais la réciproque est fausse !
Par exemple, dans l'evn $(\mathbb{R}, |.|)$, la partie $A = [-1, 1]$ est un voisinage de 0 (car $B(0, 1) =]-1, 1[\subset A$), mais ce n'est pas un voisinage de 1, car pour tout $r > 0$, $B(1, r) =]1 - r, 1 + r[\subsetneq A$).

Remarque
Si A est un voisinage de a, alors toute partie $A' \supset A$ est un voisinage de a.

Lemme 2 (Reformulation avec des boules fermées)
Soit $a \in E$ et soit $A \subset E$.
A est un voisinage de a $\iff$ il existe un réel $r > 0$ tel que $B_f(a, r) \subset A$.

Preuve
Si A est un voisinage de a, alors il existe $r' > 0$ tel que $B(a, r') \subset A$. En posant $r = \frac{r'}{2} > 0$, on a alors $B_f(a, r) \subset B(a, r') \subset A$.
Réciproquement, s'il existe $r > 0$ tel que $B_f(a, r) \subset A$, alors on a directement $B(a, r) \subset B_f(a, r) \subset A$, donc A est un voisinage de a.

2) Ouverts, fermés

Définition 3 (Partie ouverte)
Une partie $U \subset E$ est dite **ouverte** *si pour tout $a \in U$, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.*

Remarque

- *U est ouverte si et seulement si U est voisinage de chacun de ses points.*
- *$\emptyset$ et E sont toujours des parties ouvertes.*

Définition 4 (Partie fermée)
Une partie $F \subset E$ est dite **fermée** *si son complémentaire $E \setminus F$ est une partie ouverte de E.*

Remarque
$\emptyset$ et E sont donc également des parties fermées.
Il existe donc des parties ouvertes et fermées à la fois !

Vocabulaire
Une partie ouverte (resp. fermée) de E est aussi appelée "un ouvert de E" (resp. "un fermé de E").

ATTENTION !
"Ouvert" n'est pas le contraire de "fermé". D'ailleurs, il existe des parties ni ouvertes, ni fermées !

Par exemple, dans $(\mathbb{R}, |.|)$, la partie $A = [0, 1[$ n'est pas ouverte, car $0 \in A$ et A n'est pas un voisinage de 0. Mais elle n'est pas fermée non plus, car le complémentaire $\mathbb{R} \setminus A =]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[$ n'est pas voisinage de 1, alors qu'il contient 1, donc $\mathbb{R} \setminus A$ n'est pas ouvert.

Propriété 5 (Stabilité par réunion / intersection)

(i) Toute réunion de parties ouvertes (même infinie) est ouverte.

(ii) Toute intersection **finie** *de parties ouvertes est ouverte.*

(iii) Toute intersection de parties fermées (même infinie) est fermée.

(iv) Toute réunion **finie** *de parties fermées est fermée.*

Preuve

(i) Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'ouverts de E. Notons $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ et montrons qu'il s'agit d'une partie ouverte. Pour $a \in U$ fixé, il existe $i_0 \in I$ tel que $a \in U_{i_0}$. Mais U_{i_0} est ouverte, donc il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U_{i_0} \subset U$ et donc U est bien voisinage de a.

(ii) Soit $(U_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie d'ouverts de E. Notons $U = \bigcap_{1\leq i\leq n} U_i$ et montrons qu'il s'agit d'un ouvert. Fixons $a \in U$. Ce point appartient à tous les ouverts $U_1, \cdots, U_n$ donc il existe des réels $r_1, \cdots, r_n > 0$ tels que $\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ B(a, r_i) \subset U_i$. En posant $r = \min(r_1, \cdots, r_n)$, on a $r > 0$ et $B(a, r) \subset B(a, r_i) \subset U_i$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, donc $B(a, r) \subset U$.

(iii) Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de fermés de E. Les $E \setminus F_i$ sont ouverts donc $\bigcup_{i\in I}(E \setminus F_i)$ est ouverte d'après (i). Mais $\bigcup_{i\in I}(E \setminus F_i) = E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)$, donc $E \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)$ est ouverte, ce qui montre que $\bigcap_{i\in I} F_i$ est fermée.

(iv) Soit $(F_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille finie de fermés de E. Les $E \setminus F_i$ sont ouverts donc $\bigcap_{1\leq i\leq n}(E \setminus F_i)$ est ouverte d'après (ii). Mais $\bigcap_{1\leq i\leq n}(E \setminus F_i) = E \setminus \left(\bigcup_{1\leq i\leq n} F_i\right)$, donc $E \setminus \left(\bigcup_{1\leq i\leq n} F_i\right)$ est ouverte, ce qui montre que $\bigcup_{1\leq i\leq n} F_i$ est fermée.

ATTENTION !

Une intersection infinie d'ouverts peut ne pas être ouverte.
Une réunion infinie de fermés peut ne pas être fermée.
Voir les exemples ci-après.

Propriété 6 (Topologie des boules, sphères, singletons)

(i) Toute boule ouverte est une partie ouverte de E.

(ii) Toute boule fermée est une partie fermée de E.

(iii) Toute sphère est une partie fermée de E.

(iv) Tout singleton $\{a\}$ est une partie fermée de E.

Preuve

Fixons $a \in E$ et $r > 0$.

(i) Montrons que $B(a, r)$ est ouverte. On fixe $x \in B(a, r)$ et on trouve $r' > 0$ tel que $B(x, r') \subset B(a, r)$. Un dessin permet de conjecturer que le rayon $r' = r - d(a, x)$ fonctionne. Vérifions : tout d'abord, $r' > 0$ car $d(a, x) < r$, étant donné que $x \in B(a, r)$.
Ensuite, pour tout $y \in B(x, r')$, on a par inégalité triangulaire :

$$d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r' + d(x, a) = r,$$

donc $d(y, a) < r$, c'est-à-dire $y \in B(a, r)$, ce qui prouve bien l'inclusion $B(x, r') \subset B(a, r)$.

(ii) Pour montrer que $B_f(a,r)$ est fermée, montrons que $E \setminus B_f(a,r)$ est une partie ouverte. Soit donc $x \in E \setminus B_f(a,r)$. On a $d(a,x) > r$. Guidés par le dessin, posons $r' = d(a,x) - r > 0$ et vérifions que $B(x,r') \subset E \setminus B_f(a,r)$: pour tout $y \in B(x,r')$, on a par inégalité triangulaire renversée :

$$d(a,y) \geq |d(a,x) - d(x,y)| \geq d(a,x) - d(x,y) > d(a,x) - r' = r,$$

ce qui montre que $d(a,y) > r$ et donc $y \in E \setminus B_f(a,r)$.

(iii) Notons $S(a,r)$ la sphère de centre a et de rayon r. On a :

$$S(a,r) = \{x \in E,\ d(a,x) \leq r\} \cap \{x \in E,\ d(a,x) \geq r\} = B_f(a,r) \cap (E \setminus B(a,r)),$$

donc $S(a,r)$ est fermée comme intersection de deux parties fermées.

(iv) Le singleton $\{a\}$ est une intersection (infinie) de boules fermées, donc un fermé de E. En effet, on a la décomposition

$$\{a\} = \bigcap_{n \geq 1} B_f\left(a, \frac{1}{n}\right),$$

puisque pour tout $x \in E$:

$$x \in \bigcap_{n \geq 1} B_f\left(a, \frac{1}{n}\right) \iff \forall n \geq 1,\ \|x-a\| \leq \frac{1}{n} \iff \|x-a\| = 0 \iff x = a.$$

Exemple
Dans $(\mathbb{R}, |.|)$:

- tout intervalle $]a,b[$ avec $a < b$ est ouvert, car il s'agit de la boule ouverte de centre $\frac{a+b}{2}$ et de rayon $r = \frac{b-a}{2}$;
- tout intervalle $]a,+\infty[$ est ouvert, car $]a,+\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]a, a+n[$, donc cet intervalle est une réunion d'ouverts ; de même, tout intervalle $]-\infty, b[$ est ouvert ;
- tout segment $[a,b]$ avec $a < b$ est fermé, car il s'agit de la boule fermée de centre $\frac{a+b}{2}$ et de rayon $r = \frac{b-a}{2}$;
- tout intervalle $[a,+\infty[$ est fermé, car $\mathbb{R} \setminus [a,+\infty[=]-\infty, a[$ est ouvert ; de même, tout intervalle $]-\infty, b]$ est fermé ;
- une intersection infinie d'ouverts n'est pas nécessairement ouverte : par exemple

$$[0,1[= \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left]-\frac{1}{n}, 1\right[.$$

- une réunion infinie de fermés n'est pas nécessairement fermée : par exemple,

$$[0,1[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right].$$

Propriété 7 (Produit fini d'ouverts, de fermés)
Soit $(E_1, N_1), \cdots, (E_n, N_n)$ des $\mathbb{K}$-evn. On munit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ de la norme

$$N : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x = (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & N(x) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} N_i(x_i) \end{array} \right. .$$

(i) Si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, U_i est un ouvert de (E_i, N_i) alors le produit $U = U_1 \times \cdots \times U_n$ est un ouvert de (E, N).

(ii) Si pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, F_i est un fermé de (E_i, N_i) alors le produit $F = F_1 \times \cdots \times F_n$ est un fermé de (E, N).

Preuve

(i) Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in E$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(a_i, r_i) \subset U_i$ (puisque U_i est ouvert). Posons $r = \min(r_1, \cdots, r_n) > 0$. Alors, on a $B(a, r) \subset U$ car pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in E$:

$$x \in B(a,r) \iff N(x-a) < r \iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ N_i(x_i - a_i) < r_i$$

$$\iff \forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i \in B(a_i, r_i) \subset U_i \implies x \in U = U_1 \times \cdots \times U_n.$$

Donc U est bien un ouvert de (E, N).

(ii) Le complémentaire de $F = F_1 \times \cdots \times F_n$ dans E est

$$E \setminus F = \{(x_1, \cdots, x_n) \in E,\ \exists i \in [\![1,n]\!],\ x_i \notin F_i\} = \bigcup_{i=1}^{n} G_i,$$

où $G_i = E_1 \times \cdots \times E_{i-1} \times (E_i \setminus F_i) \times E_{i+1} \times \cdots \times E_n$. Chaque E_j (avec $j \neq i$) est un ouvert de (E_j, N_j) et $(E_i \setminus F_i)$ est un ouvert de (E_i, N_i) (complémentaire d'un fermé), donc par le point (i), chaque G_i est un ouvert de (E, N), et donc $E \setminus F$ est un ouvert de (E, N).

Exemple
Dans l'evn $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$, les ensembles

$$U_1 =]a,b[\times]c,d[, \qquad U_2 =]a,+\infty[\times\mathbb{R}, \qquad U_3 = \mathbb{R}\times]c,d[$$

sont des ouverts, et les ensembles

$$F_1 = [a,b] \times [c,d], \qquad F_2 = \mathbb{R} \times [a, +\infty[$$

sont des fermés.

3) Intérieur, adhérence, frontière

Définition 8 (Point intérieur à une partie)
Soit $A \subset E$ et soit $a \in E$. On dit que a est **intérieur** *à A lorsque A est un voisinage de a, c'est-à-dire lorsqu'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$.*

Notation
Pour toute partie $A \subset E$, on notera $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A, appelé **l'intérieur** de A.

Propriété 9 (Caractérisation de l'intérieur en tant qu'ouvert)
Soit $A \subset E$. Alors, $\mathring{A}$ est la plus grande partie ouverte contenue dans A.

Preuve

- Il est clair que $\mathring{A} \subset A$.
- Montrons que $\mathring{A}$ est une partie ouverte de E. Si $x \in \mathring{A}$, alors il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$. Mais $B(x, r)$ est ouvert, donc pour tout $y \in B(x, r)$, il existe $r' > 0$ tel que $B(y, r') \subset B(x, r) \subset A$, et donc $y \in \mathring{A}$. On a montré $B(x, r) \subset \mathring{A}$, et donc $\mathring{A}$ est bien une partie ouverte de E.
- Montrons enfin la maximalité de $\mathring{A}$. Si U est un ouvert quelconque tel que $U \subset A$, alors pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U \subset A$, donc x est intérieur à A c'est-à-dire $x \in \mathring{A}$. Ceci montre que $U \subset \mathring{A}$.

Remarque
On peut donc décrire l'intérieur de A de manière abstraite, comme la réunion de tous les ouverts contenus dans A :

$$\mathring{A} = \bigcup_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \subset A}} U.$$

Corollaire 10 (Caractérisation des ouverts par l'intérieur)
Une partie A est ouverte si et seulement si $\mathring{A} = A$.

Preuve
Si A est ouverte, alors A est un ouvert contenu dans A, donc $A \subset \mathring{A}$, et l'inclusion réciproque est toujours vraie, donc $\mathring{A} = A$.
Réciproquement, si $\mathring{A} = A$, alors A est ouverte car $\mathring{A}$ l'est.

Définition 11 (Point adhérent à une partie)
Soit $A \subset E$ et soit $a \in E$. On dit que a est **adhérent** *à A lorsque pour tout réel $r > 0$, la boule $B(a, r)$ contient au moins un élément de A (i.e $\forall r > 0,\ B(a, r) \cap A \neq \emptyset$).*

Remarque
On montre facilement que a est adhérent à A ssi tout voisinage de a rencontre A.

<u>ATTENTION !</u>
Tout point de A est adhérent à A, mais un point adhérent à A n'est pas forcément dans A !
Par exemple, dans $(\mathbb{R}, |.|)$, le point 0 est adhérent à $]0, 1[$ car pour tout $r > 0$,
$]-r, r[\cap]0, 1[=]0, \min(r, 1)[\neq \emptyset$.

Notation
Pour toute partie $A \subset E$, on notera $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A, appelé **l'adhérence** de A.

Exemple (Bornes supérieures / inférieures dans $\mathbb{R}$)
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$.
Alors **$\sup(A)$ est le seul majorant de A qui est dans $\overline{A}$**.
En effet, $M = \sup(A)$ est l'unique réel tel que :

- $\forall x \in A,\ x \leq M$;
- pour tout $\varepsilon > 0$, $M - \varepsilon$ ne majore pas A, c'est-à-dire il existe $a \in A$ tel que $M - \varepsilon < a$.

et ces deux conditions sont équivalentes à :

- $A \subset]-\infty, M]$;
- pour tout $\varepsilon > 0$, $]M - \varepsilon, M + \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$.

De même, si A est non vide et minorée, alors $\inf(A)$ est l'unique minorant de A qui est dans $\overline{A}$.

Propriété 12 (Complémentaire et intérieur/adhérence)
Pour toute partie $A \subset E$, on a $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}$, ainsi que $E \setminus \mathring{A} = \overline{E \setminus A}$.

Preuve
Soit $x \in E$. On a :

$$x \notin \overline{A} \iff \exists r > 0,\ B(x, r) \cap A = \emptyset \iff \exists r > 0,\ B(x, r) \subset E \setminus A \iff x \in \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}},$$

donc $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}$ pour toute partie $A \subset E$.
En remplaçant A par $E \setminus A$, on obtient $E \setminus \left(\overline{E \setminus A}\right) = \mathring{A}$ et donc $\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A}$.

Propriété 13 (Caractérisation de l'adhérence en tant que fermé)
Soit $A \subset E$. Alors $\overline{A}$ est la plus petite partie fermée contenant A.

Preuve

D'après la proposition précédente $\overline{A}$ est le complémentaire de $\overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}}$.
Or, d'après la proposition 9, on a

$$\overset{\circ}{\widehat{E \setminus A}} = \bigcup_{\substack{U \text{ ouvert} \\ U \subset E \setminus A}} U = \bigcup_{\substack{U \text{ ouvert} \\ A \subset E \setminus U}} U,$$

donc en passant au complémentaire :

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{U \text{ ouvert} \\ A \subset E \setminus U}} (E \setminus U) = \bigcap_{\substack{F \text{ fermé} \\ A \subset F}} F.$$

Ainsi, l'adhérence de A apparaît comme l'intersection de tous les fermés contenant A, c'est-à-dire le plus petit ensemble fermé contenant A.

Corollaire 14 (Caractérisation des fermés par l'adhérence)
Une partie A est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.

Preuve
Si A est fermée, alors A est un fermé contenant A, donc $\overline{A} \subset A$, et l'inclusion réciproque est toujours vraie, donc $\overline{A} = A$.
Réciproquement, si $\overline{A} = A$, alors A est fermée car $\overline{A}$ l'est.

Définition 15 (Frontière d'une partie)
Soit $A \subset E$. On appelle **frontière** *de A (ou* **bord** *de A) la partie $Fr(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.*

Notation
Parfois, la frontière de A est notée ∂A.

Propriété 16 (Fermeture de la frontière)
Pour toute partie $A \subset E$, $Fr(A)$ est fermée.

Preuve
D'après la proposition 12, $Fr(A) = \overline{A} \cap (E \setminus \mathring{A}) = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}$, donc $Fr(A)$ est fermée comme intersection de parties fermées.

Exemple
Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, pour tout $a < b$:

- les intervalles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ et $]a, b[$ ont même intérieur ($]a, b[$), même adhérence ($[a, b]$) et même frontière ($\{a, b\}$) ;
- la frontière de $[a, +\infty[$ et de $]a, +\infty[$ est $\{a\}$;
- la frontière de $]-\infty, +\infty[$ est $\emptyset$.

4) Caractérisations séquentielles

Théorème 17 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence)
Soit $A \subset E$ et soit $a \in E$. Alors :
$a \in \overline{A}$ si et seulement si il existe une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a.

Preuve

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} a$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in A$ et $a \in E$. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$, la boule fermée $B_f(a, \varepsilon/2)$ contient tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang, donc la boule ouverte

$B(a,\varepsilon)$ aussi (puisque $B_f(a,\varepsilon/2) \subset B(a,\varepsilon)$).
D'où $\forall \varepsilon > 0,\ B(a,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ (puisque les u_n sont dans A). Ceci montre que $a \in \overline{A}$.
$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $a \in \overline{A}$ et construisons une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a.
Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, on a par définition de l'adhérence $B(a, \frac{1}{n+1}) \cap A \neq \emptyset$, donc la boule $B(a, \frac{1}{n+1})$ contient au moins un élément de A, noté u_n. Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on dispose donc d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in A, \qquad \|u_n - a\| < \frac{1}{n+1}.$$

Vu que $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit par majoration que $(u_n)_{n\in A}$ converge vers a.

Remarque
Ainsi, $\overline{A}$ est formé des limites de toutes les suites à valeurs dans A.

Corollaire 18 (Adhérence d'une boule ouverte)
Pour tout $a \in E$ et pour tout $r > 0$, on a $\overline{B(a,r)} = B_f(a,r)$.

Preuve
Puisque $B_f(a,r)$ est un fermé contenant $B(a,r)$, on a déjà $\overline{B(a,r)} \subset B_f(a,r)$.
Montrons l'inclusion réciproque en utilisant la caractérisation séquentielle de l'adhérence : soit $x \in B_f(a,r)$. Si $x \in B(a,r)$, on a évidemment $x \in \overline{B(a,r)}$. Sinon, $x \in S(a,r)$ et on a $\|x-a\| = r$. En posant alors

$$\forall n \geq 1, \qquad u_n = a + \left(1 - \frac{1}{n}\right)(x-a) = x - \frac{x-a}{n},$$

(faire un dessin pour trouver cette suite) on a $u_n \in B(a,r)$ pour tout n, car

$$\|u_n - a\| = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\|x-a\| = r\left(1 - \frac{1}{n}\right) < r,$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x$ car $\|u_n - x\| = \frac{r}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $x \in \overline{B(a,r)}$, puisque x est limite d'une suite de points de $B(a,r)$. Finalement, $B_f(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$.

Notation
Une boule fermée pourra donc se noter $\overline{B(a,r)}$ plutôt que $B_f(a,r)$ sans ambiguïté.

Corollaire 19 (Caractérisation séquentielle des fermés)
Une partie $A \subset E$ est fermée si et seulement si pour toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in E$, on a $\ell \in A$.

Preuve
D'après la proposition 14, A est fermée si et seulement si $\overline{A} \subset A$, ce qui signifie d'après la proposition précédente que tout point qui est limite d'une suite de $A^{\mathbb{N}}$ est dans A.

ATTENTION !
Une suite à valeurs dans une partie fermée n'est pas nécessairement convergente (par ex, $(-1)^n$ est divergente, bien qu'à valeurs dans le fermé $[-1,1]$).
Attention à ne pas mal interpréter cette caractérisation !

Remarque
Les parties fermées sont donc les parties "stables par passage à la limite".

5) Densité

Définition 20 (Partie dense)
Soit $A \subset E$. On dit que A **est dense** *dans E lorsque $\overline{A} = E$.*

Remarque (Reformulations de la densité)
A est dense dans E signifie que tout point de E est limite d'une suite de points de A, ou encore que pour tout $x \in E$ et tout $r > 0$, $B(x, r)$ contient des éléments de A.

Exemple
$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$ car tout intervalle réel non vide contient des rationnels et des irrationnels (cf. cours MP2I).

6) Topologie relative à une partie

Examinons maintenant ce qu'il se passe lorsqu'on se restreint à une partie $X \subset E$.
Ces notions seront utiles lorsque l'on abordera l'étude de la continuité d'une fonction définie seulement sur X (et non pas sur E tout entier).

Définition 21 (Voisinage relatif à X)
Etant donné $X \subset E$ et $a \in \overline{X}$, on appelle **voisinage de a relatif à X** *toute partie de la forme $V \cap X$, où V est un voisinage de a.*

Exemple
Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, l'intervalle $I =]0, 1]$ est un voisinage de 0 relatif à $X =]0, +\infty[$, car $I = [-1, 1] \cap X$, et $[-1, 1]$ est bien un voisinage de 0. En revanche, I n'est pas un voisinage de 0.

Remarque

- *Tout voisinage de a relatif à X est évidemment une partie de X. L'idée est la suivante : on prend un voisinage de a dans E et on ne conserve que la partie qui est dans X (grâce à l'intersection).*
- *L'hypothèse "$a \in \overline{X}$" garantit que pour tout voisinage V de a, l'intersection $V \cap X$ est non vide.*

Propriété 22 (Caractérisation des voisinages relatifs avec les boules)
Soit $X \subset E$, $A \subset X$, et $a \in \overline{X}$.
A est un voisinage de a relatif à X si et seulement s'il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap X \subset A$.

Preuve (non traitée en classe)

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $A = V \cap X$, avec V voisinage de a, alors il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$.
Donc $(B(a, r) \cap X) \subset (V \cap X)$, c'est-à-dire $B(a, r) \cap X \subset A$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ S'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \cap X \subset A$, alors en posant $V = B(a, r) \cup A$, on a bien V voisinage de a (car $B(a, r) \subset V$), et $V \cap X = A$: en effet

$$V \cap X = (\underbrace{B(a, r) \cap X}_{\subset A}) \cup (\underbrace{A \cap X}_{=A}) = A.$$

Définition 23 (Ouvert relatif à X)
Etant donné $X \subset E$, on appelle **ouvert relatif à X** *toute partie de E de la forme $U \cap X$, avec U une partie ouverte de E.*

Propriété 24 (Caractérisation des ouverts relatifs avec les voisinages relatifs)
Soit $X \subset E$ et $A \subset X$. Alors A est un ouvert relatif à X si et seulement si A est un voisinage relatif à X de chacun de ses points.

Preuve (non traitée en classe)

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $A = U \cap X$ avec U un ouvert de E, alors pour tout $a \in A$, U est un voisinage de a (puisque U est ouvert et $a \in A \subset U$), donc A est bien un voisinage de a relatif à X.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que A est un voisinage relatif à X de chacun de ses points et montrons que $A = U \cap X$ avec U un ouvert de E. Par hypothèse et d'après la proposition 22 : pour tout $a \in A$, il existe $r_a > 0$

tel que $B(a,r_a)\cap X\subset A$. Ainsi, on a $A=\bigcup_{a\in A}(B(a,r_a)\cap X)=U\cap X$ en posant $U=\bigcup_{a\in A}B(a,r_a)$ qui est bien ouvert comme réunion d'ouverts de E.

Remarque
Bien sûr, on peut faire "dans l'autre sens" : définir les ouverts relatifs à X comme les parties de $A\subset X$ qui sont voisinage relatif de tous leurs points, et montrer que cela correspond aux parties de la forme $A=U\cap X$, avec U ouvert de E.

Définition 25 (Fermé relatif à X)
Etant donné $X\subset E$, on appelle **fermé relatif à $\boldsymbol{X}$** *toute partie de E de la forme $F\cap X$, avec F une partie fermée de E.*

Propriété 26 (Caractérisations des fermés relatifs à X)
Soit $X\subset E$ et $A\subset X$. Alors on a équivalence entre :

(i) A est un fermé relatif à X ;

(ii) pour toute suite $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell\in\boldsymbol{X}$, on a $\ell\in A$;

(iii) le complémentaire de A **dans $\boldsymbol{X}$** *est un ouvert relatif à X.*

Preuve (non traitée en classe)

$\boxed{(i)\implies(ii)}$: Supposons que $A=F\cap X$, où F est une partie fermée de E, et considérons $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell\in X$. La suite (x_n) est à valeurs dans F, qui est une partie fermée, donc sa limite ℓ est dans F. Mais par hypothèse, $\ell\in X$, donc $\ell\in F\cap X=A$.

$\boxed{(ii)\implies(iii)}$: Supposons la propriété séquentielle (ii), et montrons que $X\setminus A$ est un ouvert relatif à X. Si ce n'était pas le cas, alors d'après la prop 24, il existerait un point $x\in X\setminus A$ tel que $X\setminus A$ ne soit pas voisinage de x relatif à X. Ceci signifie d'après la prop 22 que pour tout réel $r>0$, $B(x,r)\cap X$ n'est pas incluse dans $X\setminus A$, ou encore que $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$. Ainsi, $x\in\overline{A}$, donc il existe une suite $(x_n)\in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Mais puisque $x\in X$, on obtient par l'hypothèse (ii) que $x\in A$, ce qui est contradictoire. Donc $X\setminus A$ est un ouvert relatif à X.

$\boxed{(iii)\implies(i)}$: Si $X\setminus A=U\cap X$ avec U une partie ouverte de E, alors $A=(E\setminus U)\cap X=F\cap X$, avec $F=E\setminus U$ fermé de E.

ATTENTION !
Dans la caractérisation séquentielle des fermés relatifs à X (point (ii)), on suppose que la limite de la suite est **déjà dans $\boldsymbol{X}$**, et non pas simplement dans E. Par exemple, l'ensemble $A=]0;1]$ est un fermé relatif à $X=]0;+\infty[$ puisque $A=[0;1]\cap X$, et pourtant la suite $(1/n)_{n\geq1}$, à valeurs dans A, converge vers $0\notin A$.

Remarque
Comme pour les ouverts relatifs, on peut définir les fermés relatifs à X comme les complémentaires dans X des ouverts relatifs à X, et montrer que cela correspond bien aux parties de la forme $F\cap X$, avec F fermé de E.

7) Invariance des notions topologiques par des normes équivalentes

Théorème 27 (Voisinages, ouverts, fermés pour des normes équivalentes)
Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors les deux espaces vectoriels normés (E,N_1), (E,N_2) possèdent les mêmes voisinages, les mêmes ouverts et les mêmes fermés.

Preuve
Supposons que $N_1\leq C_1N_2$ et $N_2\leq C_2N_1$ avec $C_1,C_2>0$.
Soit $a\in E$ et V un voisinage de a dans l'evn (E,N_1). Il existe $r>0$ tel que $B_1(a,r)\subset V$ (où $B_1(a,r)$

désigne la boule ouverte de centre a et de rayon r associée à la norme N_1). Puisque

$$\forall x \in E, \qquad N_1(x-a) \leq C_1 N_2(x-a),$$

on en déduit que $B_2(a, \frac{r}{C_1}) \subset B_1(a,r) \subset V$, ce qui prouve que V est un voisinage de a dans l'evn (E, N_2). Puisque les normes N_1 et N_2 ont des rôles symétriques, on obtient ainsi que pour tout a dans E, les voisinages de a pour la norme N_1 sont les mêmes que ceux pour la norme N_2.
Ensuite : une partie U est un ouvert de E lorsque U est voisinage de tous ses points, et on vient de montrer que cette notion de dépend pas de N_1 ou N_2.
Enfin, les fermés de (E, N_1) sont les complémentaires des ouverts de (E, N_1), qui sont les mêmes que ceux de (E, N_2).

ATTENTION !
Même si les normes sont équivalentes, les boules ne seront pas les mêmes (cf. les boules de $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$, $\| \cdot \|_\infty$).

II Limites et continuité

Dans cette section, $(E, \|\ .\ \|_E)$ et $(F, \|\ .\ \|_F)$ désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. On va considérer des applications définies sur une partie $X \subset E$ et à valeurs dans F.
Lorsque E et/ou F est égal à $\mathbb{K}$, on le munit naturellement de la valeur absolue / du module.

Vocabulaire ("Au voisinage de ...")
Etant donné une propriété $\mathcal{P}$, une fonction $f : X \subset E \to F$ et un point $a \in \overline{X}$ (adhérent à X), on dira que $\boldsymbol{f}$ **possède la propriété** $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ **au voisinage de** $\boldsymbol{a}$ s'il existe un voisinage V de a relatif à X tel que la restriction $f_{|V} : V \to F$ possède la propriété $\mathcal{P}$.
Sans perte de généralité, on peut supposer V de la forme $V = B(a, r) \cap X$.

1) Limite d'une fonction en un point

Définition 28 (Limite en un point)
Soit $X \subset E$, $f : X \to F$ et $a \in \overline{X}$. On dit que $\boldsymbol{f}$ **possède une limite en** $\boldsymbol{a}$ *lorsqu'il existe $\ell \in F$ tel que*
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X,\ \|x - a\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$
Dans ce cas, on dit que $\boldsymbol{f(x)}$ **tend vers** $\boldsymbol{\ell}$ **lorsque** $\boldsymbol{x}$ **tend vers** $\boldsymbol{a}$ *et on note $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$ ou encore $f \underset{a}{\to} \ell$.*

Remarque (Cas où f est définie en a)
Si $a \in X$, alors la seule limite possible en a est $f(a)$ (prendre $x = a$ dans la définition avec les quantificateurs, on obtient $\|f(a) - \ell\|_F \leq \varepsilon$ pour tout réel $\varepsilon > 0$, donc $\ell = f(a)$).

Lemme 29 (Reformulation de la notion de limite avec des inégalités strictes)
Soit $X \subset E$, $f : X \to F$, $a \in \overline{X}$ et $\ell \in F$. Alors :
$$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \iff (\forall \varepsilon' > 0,\ \exists \delta' > 0,\ \forall x \in X,\ \|x - a\|_E < \delta' \implies \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon').$$

Preuve (non traitée en classe)
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\varepsilon' > 0$. En utilisant la définition de la limite avec $\varepsilon = \varepsilon'/2$, il existe $\delta > 0$ tel que $(\|x - a\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon'/2)$. D'où l'implication :
$$\|x - a\|_E < \delta \implies \|x - a\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon'/2 \implies \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon',$$
et $\delta' = \delta$ convient.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant la propriété supposée avec $\varepsilon' = \varepsilon$, il existe $\delta' > 0$ tel que $(\|x - a\|_E < \delta' \implies \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon)$. En posant alors $\delta = \delta'/2$, on a l'implication :
$$\|x - a\|_E \leq \delta \implies \|x - a\|_E < \delta' \implies \|f(x) - \ell\|_F < \varepsilon \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon,$$
ce qui montre que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Remarque (Reformulation géométrique de la limite)
D'après le lemme précédent, "$f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$" signifie donc que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad x \in B(a, \delta) \cap X \implies f(x) \in B(\ell, \varepsilon),$$
ou encore
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0, \quad f\left(B(a, \delta) \cap X\right) \subset B(\ell, \varepsilon).$$
Avec cette reformulation, on comprend le rôle de l'hypothèse "$a \in \overline{X}$" : puisque $\forall \delta > 0$, $B(a, \delta) \cap X \neq \emptyset$, ceci garantit la non-trivialité de la propriété qui définit la limite.
En effet, si on avait l'existence de $\delta_0 > 0$ tel que $B(a, \delta_0) \cap X = \emptyset$, alors l'inclusion
$$f\left(B(a, \delta_0) \cap X\right) = f(\emptyset) = \emptyset \subset B(\ell, \varepsilon)$$

serait automatiquement vérifiée pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\ell \in F$!

Remarque (Reformulation de la limite avec des voisinages)
"$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$" signifie également que pour tout voisinage W de ℓ dans F, il existe un voisinage V de a relatif à X tel que $f(V) \subset W$.
Cette définition de la limite est la plus simple, mais aussi la plus abstraite !

Théorème 30 (Caractérisation séquentielle de la limite)
Soient $X \subset E$, $f : X \to F$, $a \in \overline{X}$ et $\ell \in F$. Alors :
$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ si et seulement si pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, on a $(x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \implies f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell)$.

Preuve

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\to} \ell$ et considérons une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a. Etant donné un réel $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in X$, $\|x - a\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$.
Mais par convergence de la suite (x_n) vers a, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geq n_0 \implies \|x_n - a\|_E \leq \delta)$, donc $(n \geq n_0 \implies \|f(x_n) - \ell\|_F \leq \varepsilon)$ (puisque $x_n \in X$), ce qui montre la convergence de la suite $(f(x_n))$ vers ℓ.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que la propriété $(x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \implies f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell)$ soit vraie pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ et montrons que f tend vers ℓ en a. Si ce n'était pas le cas, on aurait :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in X,\ \|x - a\|_E \leq \delta \text{ et } \|f(x) - \ell\|_F > \varepsilon.$$

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, en posant $\delta = \frac{1}{n+1}$ (ou toute autre suite tendant vers 0...), il existe alors un élément $x_n \in X$ tel que $\|x_n - a\|_E \leq \frac{1}{n+1}$ et $\|f(x_n) - \ell\|_F > \varepsilon$. On dispose donc d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ dont chaque terme vérifie les deux inégalités précédentes.
Vu que $\frac{1}{n+1} \to 0$, on obtient par majoration que (x_n) converge vers a, mais la minoration $\|f(x_n) - \ell\|_F > \varepsilon$ montre que $(f(x_n))$ ne converge pas vers ℓ (sinon par passage à la limite dans l'inégalité on aurait l'absurdité $0 \geq \varepsilon$), ce qui contredit l'hypothèse de départ. On a donc bien $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Propriété 31 (Unicité de la limite d'une fonction)
Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$ et si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$, alors $\ell = \ell'$.
On dit alors que ℓ est la **limite** *de f en a et on note $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, ou $\ell = \lim\limits_{a} f$.*

Preuve (non traitée en classe)
Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$ (une telle suite existe car $a \in \overline{X}$). Puisque f tend vers ℓ et ℓ' lorsque $x \to a$, on a $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ d'après la caractérisation séquentielle de la limite, mais aussi $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$. Par unicité de la limite de la suite $(f(x_n))$, on en déduit $\ell = \ell'$.

2) Opérations sur les limites

Propriété 32 (Limite d'une fonction à valeurs dans un espace produit)
On considère des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés $(F_1, N_1), \cdots, (F_p, N_p)$ et on munit l'espace produit $F = F_1 \times \cdots \times F_p$ de la norme $N : F \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$N(y_1, \cdots, y_p) = \max(N_1(y_1), \cdots, N_p(y_p)).$$

Soit $f : X \subset E \to F$, $a \in \overline{X}$ et $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_p) \in F$.
Notons $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_p(x))$ pour tout $x \in E$. Alors, on a :

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell \iff \forall i \in \{1, \cdots, p\},\ f_i(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell_i,$$

Vocabulaire
Les applications $f_1, \cdots, f_p$ sont appelées les **composantes** de f ou encore les **fonctions coordonnées** de f.

Preuve (non traitée en classe)
On utilise la caractérisation séquentielle : étant donnée une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, on a (cf. CH. 5),

$$f(x_n) = (f_1(x_n), \cdots, f_p(x_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \forall i \in \{1, \cdots, p\},\ f_i(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_i,$$

ce qui prouve l'équivalence voulue.

Propriété 33 (Opérations algébriques sur les limites de fonctions)
Soit $X \subset E$, $a \in \overline{X}$, $f : X \to F$ et $g : X \to F$. On suppose que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in F$ et $g \underset{a}{\longrightarrow} \ell' \in F$.

(i) On a $f + g \underset{a}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda f \underset{a}{\longrightarrow} \lambda\ell$.

Preuve (non traitée en classe)
Direct avec la caractérisation séquentielle par opérations algébriques sur les suites convergentes (cf. CH.5).

Propriété 34 (Limite d'un produit externe)
Soit $X \subset E$, $a \in \overline{X}$, $\alpha : X \to \mathbb{K}$ et $f : X \to F$. On suppose que $\alpha \underset{a}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{K}$ et $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in F$.
Alors $\alpha f \underset{a}{\longrightarrow} \lambda\ell \in F$.

Preuve (non traitée en classe)
Direct avec la caractérisation séquentielle par compatibilité de la convergence des suites avec le produit externe (cf. CH.5).

Remarque
Lorsque $F = \mathbb{K}$, on retrouve ainsi la limite du produit de deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ (traité dans le cours de MP2I).

Propriété 35 (Limite d'un inverse scalaire)
Soit $X \subset E$, $a \in \overline{X}$, $f : X \to \mathbb{K}$. On suppose que $f \underset{a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K}^*$.
Alors f ne s'annule pas au voisinage de a, et $\frac{1}{f} \underset{a}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}$.

Preuve
Montrons déjà que f ne s'annule pas sur un voisinage de a. Par définition de la limite, il existe $r > 0$ tel que $f(B(a, r) \cap X) \subset B(\ell, \frac{|\ell|}{2})$. Ainsi, sur le voisinage relatif $V = B(a, r) \cap X$, la fonction f vérifie

$$x \in V \implies |f(x) - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2} \implies |f(x)| \geq \frac{|\ell|}{2} > 0$$

(par inégalité triangulaire renversée), donc la restriction $f_{|V}$ ne s'annule jamais, et $\frac{1}{f} : V \to \mathbb{K}$ est bien définie, ce qui permet d'envisager sa limite en a.
Pour déterminer cette limite, on utilise la caractérisation séquentielle. Etant donnée une suite $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, on a $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \neq 0$ (par hypothèse sur la limite de f en a), donc par opérations algébriques sur les suites, on en déduit que $f(u_n) \neq 0$ à partir d'un certain rang et $\frac{1}{f(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}$, ce qui donne la limite voulue pour la fonction $1/f$.

Théorème 36 (Limite d'une composée)
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, Soit $f : X \subset E \to F$ et $g : Y \subset F \to G$ tel que $f(X) \subset Y$, et soit $a \in \overline{X}$. Si $f \underset{a}{\longrightarrow} b \in F$ et si $g \underset{b}{\longrightarrow} \ell \in G$, alors $g \circ f \underset{a}{\longrightarrow} \ell$.

Preuve
Là encore, on peut utiliser la caractérisation séquentielle des limites. Etant donnée une suite $(u_n) \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a, on a $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$ (par hypothèse sur f), donc au passage $b \in \overline{f(X)} \subset \overline{Y}$, ce qui permet d'envisager la limite de g en b. Cette limite est ℓ par hypothèse, donc, toujours par caractérisation séquentielle, $g(f(u_n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, c'est-à-dire $(g \circ f)(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, ce qui donne la limite voulue pour $g \circ f$.

3) Extension : limite à l'infini, limite infinie

Définition 37 (Limite lorsque $\|x\| \to +\infty$)
Soit X une partie non bornée de E, $f : X \to F$ et $\ell \in F$.
On dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in X,\ \|x\|_E \geq R \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 38 (Limite lorsque $x \to \pm\infty$)
On suppose ici que $(E, \|\ .\ \|) = (\mathbb{R}, |\ .\ |)$ et $(F, \|\ .\ \|)$ est un evn quelconque.
Etant donné $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to F$ et $\ell \in F$:

(i) Si X n'est pas majorée, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in X,\ x \geq R \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

(ii) Si X n'est pas minorée, on dit que $f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers $-\infty$ si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in X,\ x \leq -R \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On note alors $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition 39 (Limite infinie d'une fonction réelle)
On suppose ici que $(E, \|\ .\ \|)$ est un evn quelconque et $(F, \|\ .\ \|) = (\mathbb{R}, |\ .\ |)$.
Etant donné $X \subset E$, $a \in \overline{X}$ et $f : X \to \mathbb{R}$:

(i) On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall R > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X,\ \|x - a\|_E \leq \delta \implies f(x) \geq R.$$

(ii) On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a si :

$$\forall R > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X,\ \|x - a\|_E \leq \delta \implies f(x) \leq -R.$$

Remarque

- *Bien entendu, toutes ces extensions de la notion de limite peuvent s'énoncer avec des inégalités strictes, et se reformuler géométriquement avec des boules ouvertes ou fermées.*
- *On définit de même $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$ lorsque $E = F = \mathbb{R}$.*
- *On renvoie au cours de MP2I pour les propriétés des limites à l'infini / infinies des fonctions réelles.*

Remarque (Lien avec les voisinages)
Dans $\mathbb{R}$, si on appelle abusivement **voisinage de $+\infty$** *(resp. $-\infty$) tout ensemble A pour lequel il existe $R > 0$ tel que $]R, +\infty[\subset A$ (resp. $]-\infty, R[\subset A$), et de même pour les voisinages relatifs, alors on peut totalement reformuler ces notions en termes de voisinages, par exemple :*

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \forall W \text{ voisinage de } \ell,\ \exists V \text{ voisinage de } +\infty \text{ relatif à } X \text{ tel que } f(V) \subset W.$$

$$f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty \iff \forall W \text{ voisinage de } +\infty,\ \exists V \text{ voisinage de } a \text{ relatif à } X \text{ tel que } f(V) \subset W.$$

Du coup, on obtient la même chose que pour la limite en un point. Cette formalisation en termes de voisinages permet donc une unification des différentes définitions de limites (finies/infinies, en un point/en l'infini).

4) Fonctions continues

Définition 40 (Continuité en un point)
Soit $X \subset E$, $f : X \to F$ et $a \in X$. On dit que f est **continue en a** *lorsque $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a)$, c'est-à-dire :*

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in X,\ \|x - a\|_E \le \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_F \le \varepsilon.$$

<u>ATTENTION !</u>
Pour parler de continuité en a, il est nécessaire que f soit définie en a, c'est-à-dire $a \in X$ (et pas seulement $a \in \overline{X}$). En effet, la définition fait intervenir $f(a)$.
Puisque f est déjà définie en a, on a donc l'équivalence :

$$f \text{ est continue en } a \iff f \text{ possède une limite en } a$$

(voir la remarque qui suit la définition de la limite).

Remarque (Reformulations de la continuité)
Tout comme pour les limites, on a :

$$f \text{ est continue en } a \iff \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\quad f\left(B(a,\delta) \cap X\right) \subset B(f(a), \varepsilon)$$

$$\iff \forall W \text{ voisinage de } f(a),\ \exists V \text{ voisinage de } a \text{ relatif à } X \text{ tel que } f(V) \subset W.$$

Théorème 41 (Caractérisation séquentielle de la continuité)
Soit $f : X \subset E \to F$, $a \in X$. Alors :
f est continue en a ssi pour toute suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, on a $(x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \implies f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(a))$.

Preuve (dans la banque d'exercices INP)
Direct à partir du théorème de caractérisation séquentielle de la limite en a et par définition de la continuité au point a.

Définition 42 (Continuité globale)
Soit $X \subset E$. On dit qu'une application $f : X \to F$ est **continue** *lorsqu'elle est continue en tout point $a \in X$.*

Notation
Pour toute partie $X \subset E$, on notera $\mathcal{C}^0(X, F)$ l'ensemble des fonctions continues $X \to F$.

Propriété 43 (Coïncidence sur une partie dense)
Soit $f \in \mathcal{C}^0(E, F)$ et $g \in \mathcal{C}^0(E, F)$.
Si f et g sont égales sur une partie X dense dans E, alors $f = g$.

Preuve (dans la banque d'exercices INP)
Soit $a \in E$. Par densité de X dans E, il existe une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.
Par hypothèse, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = g(x_n)$, et par continuité de f et g au point a, on a aussi $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x_n) = g(a)$. Donc $f(a) = g(a)$ par unicité de la limite d'une suite.

Théorème 44 (Opérations algébriques sur les fonctions continues)
Soit $X \subset E$.

(i) $\mathcal{C}^0(X, F)$ *est un sous-espace vectoriel de* F^X.

(ii) Si $F = \mathbb{K}$, *alors* $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{K})$ *est une sous-algèbre de* $\mathbb{K}^X$.

Preuve
En utilisant les opérations algébriques sur les limites, on obtient directement que si $f : X \to F$ et $g : X \to F$ sont continues en $a \in X$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda f + g$ est aussi continue en a, puisque

$$\left(f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} f(a) \text{ et } g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} g(a)\right) \implies (\lambda f + g)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} (\lambda f + g)(a).$$

En outre, la fonction nulle $\tilde{0} : X \to F$ est clairement continue, donc $\mathcal{C}^0(X, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^X.
De plus, si $F = \mathbb{K}$, l'élément neutre de l'anneau des fonctions $X \to \mathbb{K}$ est la fonction constante égale à 1, qui est continue. Et toujours par opérations sur les limites, on obtient que le produit $fg : X \to \mathbb{K}$ est continu. Donc $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{K})$ est à la fois un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{K}^X$, c'est-à-dire une sous-algèbre.

Propriété 45 (Continuité et produit externe)
Soit $X \subset E$. Si $\alpha \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{K})$ et si $f \in \mathcal{C}^0(X, F)$, alors $\alpha f \in \mathcal{C}^0(X, F)$.

Preuve
Direct par opérations sur les limites en tout point $a \in X$ (voir prop. 34).

Théorème 46 (Composition de fonctions continues)
Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, soit $X \subset E$, $Y \subset F$. Si $f \in \mathcal{C}^0(X, F)$, $g \in \mathcal{C}^0(Y, G)$ et $f(X) \subset Y$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^0(X, G)$.

Preuve
Direct par composition de limites (cf. théorème 36.).

5) Caractérisation ensembliste de la continuité

Théorème 47 (Caractérisation de la continuité sur X par les images réciproques des ouverts / fermés)
Soit $X \subset E$ et $f : X \to F$. Alors, on a équivalence entre :

(i) f est continue ;

(ii) pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif à X ;

(iii) pour tout fermé Y de F, $f^{-1}(Y)$ est un fermé relatif à X.

Preuve
$\boxed{(i) \implies (ii)}$: Supposons f continue et considérons un ouvert U de F. On va montrer que $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif à X. Pour cela, fixons $a \in f^{-1}(U)$. On a alors $f(a) \in U$, donc puisque U est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(f(a), r) \subset U$. Par continuité de f au point a, il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$f\left(B(a, \delta) \cap X\right) \subset B(f(a), r) \subset U.$$

Ceci entraîne alors
$$(B(a,\delta) \cap X) \subset f^{-1}(U),$$
et donc $f^{-1}(U)$ est un voisinage de a relatif à X, ce qui montre que $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif à X.

$\boxed{(ii) \implies (i)}$: Supposons la propriété (ii) et montrons que f est continue. Fixons $a \in X$ et $\varepsilon > 0$. La boule ouverte $U = B(f(a), \varepsilon)$ est une partie ouverte de F, donc par hypothèse, $f^{-1}(U)$ est un ouvert relatif à X. Or, $a \in f^{-1}(U)$ (car $f(a) \in U$), donc $f^{-1}(U)$ est un voisinage de a relatif à X, d'où l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que
$$(B(a,\delta) \cap X) \subset f^{-1}(U),$$
c'est-à-dire
$$f(B(a,\delta) \cap X) \subset U = B(f(a), \varepsilon),$$
ce qui montre bien que f est continue en a.

$\boxed{(ii) \iff (iii)}$: Clair car pour toute partie $Z \subset F$, on a $f^{-1}(F \setminus Z) = X \setminus f^{-1}(Z)$, et les fermés relatifs à X sont les complémentaires dans X des ouverts relatifs à X.

Corollaire 48 (Caractérisation de la continuité sur E par les images réciproques des ouverts / fermés)
Soit $f : E \to F$. Alors, on a équivalence entre :

(i) f est continue ;

(ii) pour tout ouvert U de F, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de E ;

(iii) pour tout fermé Y de F, $f^{-1}(Y)$ est un fermé de E.

Preuve
Direct par le théorème précédent appliqué à $X = E$, puisque les ouverts (resp. fermés) relatifs à E sont exactement les parties ouvertes (resp. fermées) de E.

Remarque
Ces résultats sont notamment très utiles pour montrer qu'une partie est ouverte ou fermée. Il suffit alors de la faire apparaître comme l'image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé connu par une fonction continue.

III Continuités spécifiques

$(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ désignent toujours deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, non nuls.

1) Fonctions uniformément continues, fonctions lipschitziennes

Définition 49 (Continuité uniforme)
Soit $X \subset E$ et $f : X \to F$. On dit que f est **uniformément continue** *lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x, y) \in X^2,\ \|x - y\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

ATTENTION !
Remarquer la différence avec la continuité !
"$f : X \to F$ est continue" signifie que pour tout $y \in X$, $\lim\limits_{x \to y} f(x) = f(y)$, c'est-à-dire :

$$\forall y \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in X,\ \|x - y\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Ici, le δ dépend donc de ε **et du point y où on étudie la continuité**, alors que dans la continuité uniforme, le δ ne dépend que de ε.

Définition 50 (Caractère lipschitzien)
Soit $X \subset E$ et $f : X \to F$. On dit que f est **lipschitzienne** *lorsque :*

$$\exists K \geq 0,\ \forall (x, y) \in X^2,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x - y\|_E.$$

Propriété 51 (Liens entre les différentes continuités)
f lipschitzienne $\implies$ f uniformément continue $\implies$ f continue .

Preuve

$\boxed{\text{Implication 1}}$ Supposons que f soit lipschitzienne, i.e :

$$\exists K \geq 0,\ \forall (x, y) \in X^2,\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x - y\|_E.$$

On peut supposer $K > 0$ (quitte à augmenter K). Fixons un réel $\varepsilon > 0$. En posant $\delta = \frac{\varepsilon}{K} > 0$, on a pour tout $(x, y) \in X^2$:

$$\|x - y\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_F \leq K \|x - y\|_E \leq K\delta = \varepsilon,$$

donc f est bien uniformément continue.

$\boxed{\text{Implication 2}}$ Supposons f uniformément continue, i.e :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall (x, y) \in X^2,\ \|x - y\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Montrons alors que f est continue : étant donné un point $a \in X$ et un réel $\varepsilon > 0$, on a (en utilisant la continuité uniforme avec $y = a$) :

$$\exists \delta > 0,\ \forall x \in X,\ \|x - a\|_E \leq \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon,$$

donc f est bien continue en tout point $a \in X$.

Exemple (Application distance à une partie)
Soit $A \subset E$ une partie non vide de E. Pour tout $x \in E$, on pose

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Ce réel positif (qui existe bien car l'ensemble $\{d(x, a),\ a \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0) est appelé **distance de x à la partie A**.

Alors l'application $d_A : E \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto d_A(x) = d(x, A)$ est lipschitzienne.
En effet, étant donnés $(x, y) \in E^2$ et $a \in A$, on a :

$$d(x, A) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|,$$

c'est-à-dire

$$d(x, A) - \|x - y\| \leq d(y, a).$$

Ainsi, le réel $m = d(x, A) - \|x - y\|$ minore l'ensemble $\{d(y, a),\ a \in A\}$. Par définition de la borne inférieure on a donc $m \leq \inf\{d(y, a),\ a \in A\}$, c'est-à-dire

$$d(x, A) - \|x - y\| \leq d(y, A),$$

ou encore

$$d(x, A) - d(y, A) \leq \|x - y\|.$$

Par symétrie des rôles de x et y, on a aussi

$$d(y, A) - d(x, A) \leq \|y - x\| = \|x - y\|,$$

donc finalement

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad |d_A(x) - d_A(y)| \leq \|x - y\|,$$

ce qui montre le caractère lipschiztien de $d_A : x \mapsto d(x, A)$.

Exemple (Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment)
Toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ est lipschitzienne : en effet, la dérivée f' est continue sur le segment $[a, b]$, donc bornée, et par la formule fondamentale du calcul intégral :

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \qquad |f(x) - f(y)| = \left| \int_x^y f'(t) \right| \leq M|x - y|,$$

où $M = \sup_{t \in [a,b]} |f'(t)| = \|f'\|_{\infty,[a,b]}$.
C'est l'inégalité des accroissements finis (qui rappelons-le est vraie aussi dans le cas où f est seulement dérivable, à dérivée bornée).

Exemple (Toute norme est lipschitzienne)
Si (E, N) est un evn, alors $N : E \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne, donc continue puisque

$$\forall (x, y) \in [a, b]^2, \qquad |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$$

(inégalité triangulaire renversée).

<u>**ATTENTION !**</u>
Les implications réciproques de la prop. 51 sont toutes fausses !
Par contre, on verra par la suite qu'elles sont vraies pour les applications **linéaires** $E \to F$.

Exemple
La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne.
En effet : s'il existait $K \geq 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \qquad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq K|x - y|,$$

alors on aurait en particulier (avec $y = 0$) :

$$\forall x \geq 0, \qquad \sqrt{x} \leq Kx,$$

et donc

$$\forall x > 0, \qquad 1 \leq K\sqrt{x},$$

ce qui est impossible vu que $K\sqrt{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc f n'est pas lipschitzienne.
Toutefois, on dispose de la majoration :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2, \qquad |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|},$$

car $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = x + y + 2\sqrt{xy} \geq x + y$, et donc $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$ (sorte d'inégalité triangulaire) et on en déduit

$$0 \leq x \leq y \implies \sqrt{y} = \sqrt{(y-x)+x} \leq \sqrt{y-x} + \sqrt{x} \implies \sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y-x} = \sqrt{|x-y|},$$

$$0 \leq y \leq x \implies \sqrt{x} - \sqrt{y} \leq \sqrt{x-y} = \sqrt{|x-y|},$$

d'où l'inégalité voulue. Donc f est uniformément continue car pour tout $\varepsilon > 0$, on a, en posant $\delta = \varepsilon^2$:

$$|x-y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

Exemple
La fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est continue mais pas uniformément continue.
Elle est continue en tant que fonction réelle polynomiale. Elle n'est pas uniformément continue car pour tout $\delta > 0$ fixé, on peut toujours trouver deux points x et y tels que $|x-y| \leq \delta$ et $|g(x)-g(y)| > 1$.
En effet, en posant $x = \frac{1}{\delta}$ et $y = \frac{1}{\delta} + \delta$, on a

$$|x-y| = \delta, \qquad |g(x) - g(y)| = |x^2 - y^2| = \delta^2 + 2 \geq 2.$$

2) Continuité des applications linéaires

Notation
On notera $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires $E \to F$.
On notera également $\mathcal{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues $E \to F$.
On rappelle que $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E.
Vu que $\mathcal{L}_c(E,F) = \mathcal{L}(E,F) \cap \mathcal{C}^0(E,F)$, cet ensemble est également un sous-espace vectoriel de F^E, et on a $\mathcal{L}_c(E,F) \subset \mathcal{L}(E,F)$.

Théorème 52 (Caractérisation de la continuité des applications linéaires)
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors il y a **équivalence** *entre :*

(i) *u est continue en 0_E ;*
(ii) *u est continue ;*
(iii) *u est uniformément continue ;*
(iv) *u est lipschitzienne ;*
(v) $\exists C \geq 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$.

Preuve
Clairement, la condition (v) est la plus forte, car s'il existe $C \geq 0$ tel que $\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$, alors la linéarité de u entraîne :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad \|u(x) - u(y)\|_F = \|u(x-y)\|_F \leq C\|x-y\|_E,$$

donc u est lipschitzienne, ce qui entraîne successivement sa continuité uniforme, donc sa continuité, donc sa continuité en 0_E. On a donc :

$$(v) \implies (iv) \implies (iii) \implies (ii) \implies (i).$$

Remontons cette chaîne d'implications : si u est seulement supposée continue en 0_E, alors on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in E,\ \|x\|_E \leq \delta \implies \|u(x)\|_F = \|u(x) - u(0_E)\|_F \leq \varepsilon$$

(puisque $u(0_E) = 0_F$ par linéarité).
En fixant $\varepsilon = 1$ (par exemple), on obtient donc que u est bornée par 1 sur la boule fermée de rayon δ :

$$\|x\|_E \leq \delta \implies \|u(x)\|_F \leq 1.$$

Ceci va alors entraîner la condition (v) : étant donné un vecteur quelconque $y \in E \setminus \{0_E\}$, le vecteur $x = \delta \dfrac{y}{\|y\|_E}$ vérifie $\|x\|_E = \delta$, donc on a $\|u(x)\|_F \leq 1$. Par linéarité de u et homogénéité, cela se réécrit

$$\|u(y)\|_F \leq \frac{1}{\delta}\|y\|_E,$$

et cette inégalité reste vraie pour $y = 0_E$, donc la condition (v) est bien vérifiée avec $C = \dfrac{1}{\delta}$. Finalement :

$$(v) \implies (iv) \implies (iii) \implies (ii) \implies (i) \implies (v),$$

donc les cinq assertions sont équivalentes.

Remarque
Ainsi, on a :

$$\mathcal{L}_c(E,F) = \{u \in \mathcal{L}(E,F),\ \exists C \geq 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E\}.$$

Exemple
Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, muni de la norme $\|.\|_\infty$. Alors, la forme linéaire $u : \left\{\begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & u(f) = \int_0^1 f \end{array}\right.$ est continue car

$$\forall f \in E, \qquad |u(f)| = \left|\int_0^1 f\right| \leq \|f\|_\infty.$$

3) Normes subordonnées

Définition 53 (Norme subordonnée)
Soit $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$. On pose

$$|||u||| = \sup_{x \in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

On dit que $|||u|||$ est la **norme subordonnée** *(ou* **norme d'opérateur***, ou encore* **norme triple***) de u, associée aux normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$. On la note aussi $\|u\|_{op}$.*

Remarque
Ce "sup" est bien défini car u étant linéaire et continue, il existe une constante $C \geq 0$ telle que

$$\forall x \in E, \qquad \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E,$$

donc l'ensemble $\left\{\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$ est une partie non vide et majorée (par C) de $\mathbb{R}$.

Théorème 54 (Propriétés d'une norme subordonnée)
On dispose des propriétés suivantes :

(*i*) *Pour tout* $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ *:*
$$|\!|\!| u |\!|\!| = \min\{C \geq 0,\ \forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E\}.$$
En particulier, on a $\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq |\!|\!| u |\!|\!|\ \|x\|_E$.

(*ii*) $|\!|\!| . |\!|\!|$ *est une norme sur* $\mathcal{L}_c(E,F)$.

(*iii*) $|\!|\!| . |\!|\!|$ *est sous-multiplicative : si* $u \in \mathcal{L}_c(E,F)$ *et* $v \in \mathcal{L}_c(F,G)$ *(où* G *est un troisième evn), alors*
$$|\!|\!| v \circ u |\!|\!| \leq |\!|\!| v |\!|\!|\ |\!|\!| u |\!|\!|.$$
En particulier, $|\!|\!| . |\!|\!|$ *est une norme sous-multiplicative sur la* $\mathbb{K}$*-algèbre* $\mathcal{L}_c(E)$.

(*iv*) *On a les égalités :*
$$|\!|\!| u |\!|\!| = \sup_{x \in B_f(0,1)\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{x \in B_f(0,1)} \|u(x)\| = \sup_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|,$$
où $B_f(0,1)$ *désigne la boule unité fermée et* $S(0,1)$ *la sphère unité.*

Preuve

(*i*) Par définition d'une borne sup., $|\!|\!| u |\!|\!|$ est le plus petit majorant de l'ensemble $\left\{\frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E},\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$, et ces majorants sont exactement les $C \geq 0$ tels que $\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$ (l'inégalité est notamment toujours vraie en $x = 0_E$).

(*ii*) $|\!|\!| . |\!|\!|$ est bien définie d'après la remarque précédente, et à valeurs positives. Ensuite, pour toutes $u, v \in \mathcal{L}_c(E,F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

- si $|\!|\!| u |\!|\!| = 0$, alors pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_F \leq |\!|\!| u |\!|\!| \|x\|_E = 0$, donc $u(x) = 0_F$, ce qui montre que $u = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$;
- on a facilement $|\!|\!| \lambda u |\!|\!| = |\lambda| |\!|\!| u |\!|\!|$;
- pour tout $x \in E$:
$$\|(u+v)(x)\|_F \leq \|u(x)\|_F + \|v(x)\|_F \leq (|\!|\!| u |\!|\!| + |\!|\!| v |\!|\!|)\,\|x\|_E,$$
ce qui montre que $|\!|\!| u+v |\!|\!| \leq |\!|\!| u |\!|\!| + |\!|\!| v |\!|\!|$.

(*iii*) Pour tout $x \in E$:
$$\|(v \circ u)(x)\|_G = \|v(u(x))\|_G \leq |\!|\!| v |\!|\!| \|u(x)\|_F \leq |\!|\!| v |\!|\!| |\!|\!| u |\!|\!| \|x\|_E,$$
donc $v \circ u \in \mathcal{L}_c(E,G)$ et $|\!|\!| v \circ u |\!|\!| \leq |\!|\!| v |\!|\!| |\!|\!| u |\!|\!|$.

(*iv*) L'application $\left\{\begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \longrightarrow & S(0,1) \\ x & \longmapsto & \frac{x}{\|x\|_E} \end{array}\right.$ est surjective, et on a par linéarité de u :
$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \qquad \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \left\|u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F,$$
donc
$$|\!|\!| u |\!|\!| = \sup_{x \in E\setminus\{0_E\}} \left\|u\left(\frac{x}{\|x\|_E}\right)\right\|_F = \sup_{y \in S(0,1)} \|u(y)\|_F.$$
Par ailleurs, $S(0,1) \subset B_f(0,1) \setminus \{0\} \subset E \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in B_f(0,1) \setminus \{0\}$, on a $\|u(x)\|_F \leq \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}$, donc
$$\sup_{x \in S(0,1)} \|u(x)\|_F \leq \sup_{x \in B_f(0,1)} \|u(x)\|_F \leq \sup_{x \in B_f(0,1)\setminus\{0_E\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \sup_{x \in E\setminus\{0_E\}} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E},$$
et les deux termes extrémaux de cette chaîne d'inégalités sont égaux à $|\!|\!| u |\!|\!|$, d'où le résultat.

Exemple

Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ *muni de* $\|.\|_\infty$ *et* $T : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & T(f) \end{array} \right.$ *où* $T(f)$ *est définie de la manière suivante :*

$$\forall x \in [0,1], \quad \big(T(f)\big)(x) = \int_0^x f.$$

Montrer que $T \in \mathcal{L}_c(E,E)$ *et calculer* $|||T|||$.

- $T : E \to E$ est bien définie car si f est continue sur $[0,1]$, alors $T(f) : x \mapsto \int_0^x f$ aussi (car c'est une primitive $\mathcal{C}^1$ de f d'après le théorème fondamental de l'analyse).
- Soit $(\lambda, f, g) \in \mathbb{R} \times E \times E$. On a :
$$T(\lambda f + g) : x \mapsto \int_0^x (\lambda f + g) = \lambda \int_0^x f + \int_0^x g = (\lambda T(f) + T(g))(x),$$
donc $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$, ce qui montre que T est linéaire.
- On a la majoration :
$$\forall f \in E,\ \forall x \in [0,1], \qquad |T(f)(x)| \leq \int_0^x |f| \leq \int_0^x \|f\|_\infty = x\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty,$$
ce qui montre l'inégalité linéaire
$$\forall f \in E, \quad \|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$
Ainsi, $T \in \mathcal{L}_c(E,E)$ et $|||T||| \leq 1$.
Or, la fonction constante $f = 1$ réalise l'égalité puisque $\forall x \in [0,1],\ T(f)(x) = \int_0^x 1 = x$, donc $\|T(f)\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |x| = 1 = \|f\|_\infty$, ce qui permet de conclure que $|||T||| = 1$ (car $C = 1$ est la constante optimale dans l'inégalité linéaire précédente).

Exemple (Normes d'opérateurs classiques dans $\mathcal{L}_c(\mathbb{K}^n)$)

Nous disposons de trois normes d'opérateurs classiques sur $\mathcal{L}_c(\mathbb{K}^n)$: pour tout $u \in \mathcal{L}_c(\mathbb{K}^n)$, on pose

$$|||u|||_1 = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|_1}{\|x\|_1},$$

$$|||u|||_2 = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|_2}{\|x\|_2},$$

$$|||u|||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|u(x)\|_\infty}{\|x\|_\infty},$$

où l'on rappelle que pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|.$$

Exemple (Normes matricielles subordonnées aux normes $1, 2, \infty$)

Dans la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut également définir des normes d'opérateurs.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $f_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, et on pose :

$$|||A|||_1 = |||f_A|||_1 = \sup_{X\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1},$$

$$|||A|||_2 = |||f_A|||_2 = \sup_{X\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2},$$

$$|||A|||_\infty = |||f_A|||_\infty = \sup_{X\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}.$$

L'intérêt principal de ces normes matricielles est qu'elles sont sous-multiplicatives.

Remarque
On peut calculer explicitement $\|A\|_1$ *et* $\|A\|_\infty$ *en fonction des coefficients de* A *(voir les exercices). Le calcul explicite de* $\|A\|_2$ *se fera ultérieurement (cela demande d'autres outils).*

4) Continuité des applications multilinéaires

Théorème 55 (Caractérisation de la continuité des applications bilinéaires)
Soient E, F, G *trois* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels normés et* $b : E \times F \to G$ *une application bilinéaire. On munit l'espace produit* $E \times F$ *de la norme :*

$$\|(x, y)\|_{E\times F} = \max(\|x\|_E, \|y\|_F).$$

Alors il y a **équivalence** *entre :*

(i) b *est continue ;*

(ii) $\exists C \geq 0,\ \forall (x, y) \in E \times F, \quad \|b(x, y)\|_G \leq C\|x\|_E\|y\|_F$.

Preuve

$\boxed{(i) \implies (ii)}$ Par continuité de b en $(0_E, 0_F)$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in E \times F, \quad \|(x, y)\|_{E\times F} \leq \delta \implies \|b(x, y)\|_G = \|b(x, y) - b(0_E, 0_F)\|_G \leq 1$$

(puisque $b(0_E, 0_F) = 0_G$).
Etant donné un vecteur $(x, y) \in E \times F$ avec $x \neq 0_E$ et $y \neq 0_F$, le vecteur $z = \delta\left(\frac{x}{\|x\|_E}, \frac{y}{\|y\|_F}\right)$ vérifie $\|z\|_{E\times F} = \delta$, donc $\|b(z)\|_G \leq 1$. Or, par bilinéarité et homogénéité :

$$\|b(z)\|_G = \left\| b\left(\delta\left(\frac{x}{\|x\|_E}, \frac{y}{\|y\|_F}\right)\right)\right\|_G = \frac{\delta^2}{\|x\|_E\|y\|_F}\|b(x, y)\|_G,$$

donc on obtient l'inégalité $\|b(x, y)\|_G \leq \dfrac{1}{\delta^2}\|x\|_E\|y\|_F$, et elle reste vraie avec $x = 0_E$ ou $y = 0_F$ car b s'annule dans ce cas. D'où le résultat avec $C = \dfrac{1}{\delta^2}$.

$\boxed{(ii) \implies (i)}$ Fixons un point $(x_0, y_0) \in E \times F$ et montrons la continuité de b en ce point.
Etant donné un réel $\varepsilon > 0$, on a, pour tout $(x, y) \in E \times F$:

$$\begin{aligned}
\|b(x, y) - b(x_0, y_0)\|_G &\leq \|b(x, y) - b(x, y_0)\|_G + \|b(x, y_0) - b(x_0, y_0)\|_G \\
&\leq \|b(x, y - y_0)\|_G + \|b(x - x_0, y_0)\|_G \\
&\leq C\left(\|x\|_E\|y - y_0\|_F + \|x - x_0\|_E\|y_0\|_F\right).
\end{aligned}$$

En outre, si on considère un réel $\delta > 0$, on a

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_{E\times F} \leq \delta \implies \begin{cases} \|x - x_0\|_E \leq \delta \\ \|y - y_0\|_F \leq \delta \end{cases},$$

donc

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_{E\times F} \leq \delta \implies \|b(x, y) - b(x_0, y_0)\|_G \leq C(\|x\|_E + \|y_0\|_F)\delta.$$

Or, $\|x\|_E \leq \|x - x_0\|_E + \|x_0\|_E \leq \delta + \|x_0\|_E$ donc si on suppose $\delta \leq 1$, on aura

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_{E\times F} \leq \delta \implies \|b(x, y) - b(x_0, y_0)\|_G \leq C(1 + \|x_0\|_E + \|y_0\|_F)\delta.$$

Il suffit alors de poser $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{C(1 + \|x_0\|_E + \|y_0\|_F)}\right) > 0$ (avec convention $\delta = 1$ si $C = 0\ldots$), cela entraîne

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_{E\times F} \leq \delta \implies \|b(x, y) - b(x_0, y_0)\|_G \leq \varepsilon,$$

et donc b est bien continue en (x_0, y_0).

Exemple
Tout produit scalaire sur E est bilinéaire et continu $E \times E \to \mathbb{R}$ (pour la norme associée), grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad |(x|y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

Ce résultat se généralise aux applications multilinéaires :

Théorème 56 (Caractérisation de la continuité des applications multilinéaires)
Soient $E_1, \cdots, E_n, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés et $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ une application multilinéaire. On munit l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ de la norme :

$$\|(x_1, \cdots, x_n)\|_{E_1 \times \cdots \times E_n} = \max_{1 \leq i \leq n} (\|x_i\|_{E_i}).$$

Alors il y a **équivalence** *entre :*

(i) f est continue ;

(ii) $\exists C \geq 0,\ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n, \quad \|f(x_1, \cdots, x_n)\|_F \leq C\|x_1\|_{E_1} \cdots \|x_n\|_{E_n}$.

Preuve
Adapter la preuve du cas bilinéaire.

IV Compacité

$(E, \|\ .\ \|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1) Définition et premières propriétés

Définition 57 (Partie compacte)
Une partie $A \subset E$ est dite **compacte** *lorsque toute suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ possède une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge dans A.*

Remarque

- *La propriété qui définit une partie compacte s'appelle* **propriété de Bolzano-Weierstrass**.
- *A est compacte ssi toute suite de $A^{\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence dans A (cf. CH.5).*

Vocabulaire
On dit aussi que A est "un compact" de E.

Propriété 58 (Propriétés topologiques d'une partie compacte)
Si A est compacte, alors A est fermée et bornée dans E.

Preuve
Supposons A compacte.
Montrons que A est fermée en utilisant la caractérisation séquentielle : considérons une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in E$. Par compacité de A, il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\ell' \in A$. Mais par unicité de la limite de cette suite extraite, on a $\ell' = \ell$, donc $\ell \in A$, ce qui montre que A est fermée.
Montrons que A est bornée : si ce n'était pas le cas, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existerait $u_n \in A$ tel que $\|u_n\| > n$. D'où l'existence d'une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ sans valeur d'adhérence (puisque toutes les suites extraites vérifient $\|u_{\varphi(n)}\| \geq \varphi(n) \geq n \to +\infty$), et cela contredit la compacité de A.

<u>ATTENTION !</u>
La réciproque est fausse ! Mais on verra qu'elle est vraie si E est de dimension finie.

Propriété 59 (Un fermé d'un compact est compact)
Soit F une partie fermée de E, et A une partie compacte de E. Si $F \subset A$, alors F est compacte.

Remarque
En d'autres termes, un fermé relatif d'une partie compacte est compact.

Preuve
Soit (u_n) une suite de $F^{\mathbb{N}}$. Puisque $F \subset A$, on a $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, donc par compacité de A, il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\ell \in A$. Mais F est une partie fermée et $(u_{\varphi(n)}) \in F^{\mathbb{N}}$, donc $\ell \in F$ (par la caractérisation séquentielle des fermés). La suite (u_n) possède donc une valeur d'adhérence dans F, ce qui montre que F est compacte.

Théorème 60 (Compacité et valeurs d'adhérence)
Soit A une partie compacte de E, et (u_n) une suite de $A^{\mathbb{N}}$.
Alors, (u_n) converge si et seulement si (u_n) possède une seule valeur d'adhérence.

Preuve

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si (u_n) converge, alors elle possède une seule valeur d'adhérence : sa limite.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que (u_n) possède une seule valeur d'adhérence, notée ℓ, et montrons que (u_n) converge vers ℓ. Si ce n'est pas le cas, alors :

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \geq n_0,\ \|u_n - \ell\| > \varepsilon.$$

Cela permet de construire par récurrence une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \|u_{\varphi(n)} - \ell\| > \varepsilon.$$

En effet, on pose $n_0 = 0$, puis on choisit $\varphi(0) \geq n_0$ tel que $\|u_{\varphi(0)} - \ell\| > \varepsilon$.
Puis on pose $n_0 = \varphi(0) + 1$, on choisit $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $\|u_{\varphi(1)} - \ell\| > \varepsilon$, et ainsi de suite : si on a construit $\varphi(0) < \cdots < \varphi(n)$ tels que $\|u_{\varphi(k)} - \ell\| > \varepsilon$ pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, alors il suffit de poser $n_0 = \varphi(n) + 1$ et on peut alors choisir $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ tel que $\|u_{\varphi(n+1)} - \ell\| > \varepsilon$.
Raisonnons alors avec cette suite extraite : vu la minoration vérifiée, $(u_{\varphi(n)})$ ne converge pas vers ℓ. Mais cette suite est à valeurs dans le compact A, donc il existe une suite extraite $(u_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge vers $\ell' \in A$, avec $\ell' \neq \ell$. Finalement, la suite (u_n) possède une valeur d'adhérence différente de ℓ, ce qui est contradictoire avec les hypothèses. Ceci montre par l'absurde que (u_n) converge vers ℓ.

Théorème 61 (Produit fini de compacts)
Si $A_1, \cdots, A_p$ sont des parties compactes de $E_1, \cdots, E_p$ (des $\mathbb{K}$-evn) respectivement, alors le produit $A_1 \times \cdots \times A_p$ est une partie compacte de l'espace normé produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ (muni de la norme usuelle).

Preuve
Par récurrence sur $p \geq 2$.

- $\boxed{\text{Cas } p = 2}$: Soit $u_n = (x_n, y_n)$ une suite de $(A_1 \times A_2)^{\mathbb{N}}$. Par compacité de A_1, la suite $(x_n) \in A_1^{\mathbb{N}}$ possède une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\ell_1 \in A_1$.
En outre, par compacité de A_2, la suite $(y_{\varphi(n)}) \in A_2^{\mathbb{N}}$ possède elle aussi une suite extraite $(y_{\varphi(\psi(n))})$ qui converge vers $\ell_2 \in A_2$. Donc
$$u_{\varphi(\psi(n))} = (x_{\varphi(\psi(n))}, y_{\varphi(\psi(n))}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} (\ell_1, \ell_2) \in A_1 \times A_2,$$
ce qui montre que $A_1 \times A_2$ est compact.
- $\boxed{\text{Hérédité}}$: Soit $p \geq 2$. Supposons le résultat vrai pour p parties compactes, et montrons-le pour $p + 1$ parties compactes, notées $A_1, \cdots, A_p, A_{p+1}$. On a
$$A_1 \times \cdots \times A_p \times A_{p+1} = (A_1 \times \cdots \times A_p) \times A_{p+1},$$
et par hypothèse de récurrence, le produit $B = A_1 \times \cdots \times A_p$ est compact, donc d'après le cas initial, $A_1 \times \cdots \times A_p \times A_{p+1} = B \times A_{p+1}$ est compact.

2) Compacité et continuité

Théorème 62 (Image continue d'un compact)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evn.
Soit A une partie compacte de E et soit $f : A \to F$. Si f est continue, alors l'image $f(A)$ est compacte.

Preuve
Soit (y_n) une suite de $f(A)^{\mathbb{N}}$. Il existe alors une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = f(x_n)$. Par compacité de A, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $x \in A$. Par continuité de f, on obtient $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} f(x) \in f(A)$. Ainsi, la suite (y_n) admet une suite extraite convergente dans $f(A)$, ce qui prouve la compacité de $f(A)$.

Théorème 63 (Théorème des bornes atteintes)
Soit A une partie compacte et non vide de E, et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe $(a, b) \in A^2$ tels que

$$f(a) = \inf_{x \in A} f(x), \qquad f(b) = \sup_{x \in A} f(x).$$

Preuve
$f(A)$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée (car compacte d'après la proposition précédente), donc elle possède une borne supérieure et une borne inférieure, ce qui signifie que la fonction f est majorée et minorée.
Notons $m = \inf(f(A)) = \inf\limits_{x \in A} f(x) \in \mathbb{R}$. On a $m \in \overline{f(A)}$ (voir l'exemple qui suit la définition 11).
Mais $f(A)$ est fermée (car compacte) donc $\overline{f(A)} = f(A)$, d'où $m \in f(A)$, et on montre de même que $M = \sup(f(A)) \in f(A)$. Ainsi, les bornes m et M sont atteintes.

Remarque
Le théorème des bornes atteintes est fondamental pour l'étude des problèmes d'optimisation. Il fournit l'existence d'un extremum (maximum ou minimum) à l'aide d'une restriction à un compact.

Théorème 64 (Théorème de Heine)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evn, soit $A \subset E$ et $f : A \to F$.
Si A est compacte et f est continue, alors f est uniformément continue.

Preuve
Supposons (par l'absurde) que f ne soit pas uniformément continue. Alors :

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall \delta > 0, \ \exists (x, y) \in A^2, \ \|x - y\|_E \leq \delta \text{ et } \|f(x) - f(y)\|_F > \varepsilon.$$

En particulier, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, en posant $\delta = \frac{1}{n+1} > 0$, il existe $(x_n, y_n) \in A^2$ tels que $\|x_n - y_n\|_E \leq \frac{1}{n+1}$ et $\|f(x_n) - f(y_n)\|_F > \varepsilon$. On dispose ainsi d'une suite (x_n, y_n) de $(A^2)^{\mathbb{N}}$. Mais A^2 est compact dans $E \times E$ (comme produit fini de compacts), donc il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$ qui converge vers $(\ell, \ell') \in A^2$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\|_E \leq \frac{1}{\varphi(n)+1} \leq \frac{1}{n+1}$, donc en passant à la limite dans cette inégalité, on obtient $\|\ell - \ell'\| \leq 0$, donc $\ell = \ell'$. Mais on a aussi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})\| > \varepsilon$, donc en passant à la limite et en utilisant la continuité de f, on obtient $\|f(\ell) - f(\ell')\| = 0 \geq \varepsilon$, ce qui est absurde. Donc f est uniformémement continue.

3) Parties compactes de $(\mathbb{K}, |.|)$

Rappelons le théorème suivant, vu en MP2I :

Théorème 65 (Théorème de Bolzano-Weierstrass)
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) est bornée, alors (u_n) possède une suite extraite convergente dans $\mathbb{K}$.

Preuve
Voir cours MP2I, ou alors les exercices du chapitre 5.

Remarque
Cela peut se reformuler ainsi : toute suite bornée de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ possède au moins une valeur d'adhérence.

Corollaire 66 (Caractérisation des parties compactes de $\mathbb{K}$)
Dans l'espace vectoriel normé $(\mathbb{K}, |.|)$ une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Preuve
On sait déjà qu'une partie compacte est toujours fermée et bornée.

Montrons la réciproque : si $A \subset \mathbb{K}$ est fermée et bornée, alors étant donnée une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$, cette suite est bornée (puisque A l'est), donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers $\ell \in \mathbb{K}$. Mais A est fermée, et $(u_{\varphi(n)}) \in A^{\mathbb{N}}$, donc $\ell \in A$. Finalement, toute suite de $A^{\mathbb{N}}$ possède une valeur d'adhérence dans A, ce qui montre que A est compacte.

Exemple

- Les segments $[a, b]$ avec $a \leq b$ sont des parties compactes de $(\mathbb{R}, |.|)$.
- Tout rectangle $[a, b] \times [c, d]$ est une partie compacte de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ (car produit fini de compacts de $(\mathbb{R}, |.|)$).
- Les disques fermés $D_{a,r} = \{z \in \mathbb{C},\ |z - a| \leq r\}$ sont des parties compactes de $(\mathbb{C}, |.|)$.

V Connexité par arcs

$(E, \| \,.\, \|)$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.

1) Chemins

Définition 67 (Chemin tracé dans une partie)
Etant donnée une partie $A \subset E$, on appelle **chemin dans A** *(ou* **arc dans A***) toute application continue $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $\forall t \in [0,1], \gamma(t) \in A$.*
Etant donnés deux points $(x,y) \in A^2$, on appelle **chemin dans A de x vers y** *toute chemin dans A tel que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

Propriété 68 (Relation d'équivalence associée aux chemins)
Soit $A \subset E$. On définit sur A la relation binaire suivante :

$$\forall (x,y) \in A^2, \qquad x\mathcal{R}y \iff \text{il existe un chemin dans } A \text{ de } x \text{ vers } y.$$

Cette relation est une relation d'équivalence sur A.

Preuve
- $\mathcal{R}$ est réflexive car pour tout $x \in A$, l'application constante $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = x$ est bien un chemin dans A de x vers x.
- $\mathcal{R}$ est symétrique : en effet, si $\gamma : [0,1] \to E$ est un chemin dans A de x vers y, alors $\tilde{\gamma} : t \mapsto \gamma(1-t)$ est un chemin dans A de y vers x car $\tilde{\gamma}(0) = \gamma(1) = y$ et $\tilde{\gamma}(1) = \gamma(0) = x$.
- $\mathcal{R}$ est transitive : si $\gamma_1 : [0,1] \to E$ est un chemin dans A de x vers y et $\gamma_2 : [0,1] \to E$ un chemin dans A de y vers z, alors on considère $\gamma : [0,1] \to E$ définie par

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{si } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Cette application est bien continue car $\lim\limits_{(1/2)^-} \gamma = \gamma_1(1) = y = \gamma_2(0) = \gamma(1/2) = \lim\limits_{(1/2)^+} \gamma$, et il s'agit d'un chemin dans A de x vers z car $\gamma([0,1]) = \gamma_1([0,1[) \cup \gamma_2([0,1]) \subset A$.

Définition 69 (Composantes connexes par arcs d'une partie)
Soit $A \subset E$. Les classes d'équivalences de la relation $\mathcal{R}$ précédemment définie s'appellent les **composantes connexes par arcs** *de A.*

Remarque
Toute partie A est donc réunion disjointe de ses composantes connexes par arcs.

Définition 70 (Partie connexe par arcs)
Une partie $A \subset E$ est dite **connexe par arcs** *lorsque pour tout $(x,y) \in A^2$, il existe un chemin dans A de x vers y.*

Remarque
A est connexe par arcs ssi la relation $\mathcal{R}$ associée aux chemins dans A ne comporte qu'une seule classe d'équivalence, ce qui revient à dire que A ne possède qu'une composante connexe par arcs.

Exemple (Parties convexes, parties étoilées)
On rappelle qu'une partie $A \subset E$ est dite **convexe** lorsque pour tout $(x,y) \in A^2$, on a $[x,y] \subset A$.
Une partie $A \subset E$ est dite **étoilée** lorsqu'il existe un point $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$, $[a,x] \subset A$.
Il est évident que toute partie convexe est étoilée.
De plus, toute partie étoilée est connexe par arcs, car tout segment $[x,y]$ est un chemin (puisque $t \mapsto (1-t)x + ty$ est continue de $[0,1]$ dans E), donc si A est étoilée, tous les points x, y de A peuvent être reliés à a dans A, donc par transitivité, x peut-être relié à y dans A.
A fortiori, toute partie convexe est connexe par arcs.

2) Théorème des valeurs intermédiaires

Rappel

- Une partie $I \subset \mathbb{R}$ est un **intervalle** si et seulement si

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall z \in \mathbb{R}, \qquad (x < z < y \implies z \in I).$$

- **Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)** :
si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors pour tout $(a,b) \in I^2$ et pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in A$ tel que $f(c) = \lambda$.
- **Enoncé équivalent du TVI** :
si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue, alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 71 (Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$)
Dans $\mathbb{R}$, une partie A est connexe par arcs si et seulement si c'est un intervalle.

Preuve
Soit $A \subset \mathbb{R}$.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si A est un intervalle, alors étant donné deux points $(x,y) \in A^2$ tels que $x < y$, on pose

$$\forall t \in [0,1], \qquad \gamma(t) = (1-t)x + ty = x + t(y-x).$$

Cette application est continue (car affine donc lipschitzienne), vérifie $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$, et pour tout $t \in]0,1[$, $x < \gamma(t) < y$, donc $\gamma(t) \in A$ puisque A est un intervalle. Ainsi, $\gamma : [0,1] \to A$ est un chemin dans A de x vers y, ce qui montre que A est connexe par arcs.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Réciproquement, supposons A connexe par arcs, et considérons $(x,y) \in A^2$ et $z \in \mathbb{R}$ tel que $x < z < y$. Par hypothèse, il existe $\gamma : [0,1] \to A$ continue telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Puisque $\gamma(0) < z < \gamma(1)$, on déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires que $z \in \gamma([0,1]) \subset A$, ce qui montre que A est un intervalle.

Théorème 72 (Image continue d'une partie connexe par arcs)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-evn, soit $A \subset E$ et $f : A \to F$.
Si A est connexe par arcs et f continue, alors $f(A)$ est connexe par arcs dans F.

Preuve
Soit $x = f(a)$ et $y = f(b)$ deux points de $f(A)$, avec $(a,b) \in A^2$. Vu que A est connexe par arcs, il existe un chemin $\gamma : [0,1] \to A$ de a vers b. L'application $f \circ \gamma : [0,1] \to F$ est alors un chemin dans $f(A)$ de x vers y (elle est continue par composition, et vérifie $(f \circ \gamma)([0,1]) \subset f(A)$). Donc $f(A)$ est connexe par arcs dans F.

Exemple
Dans $(\mathbb{C}, |.|)$, le cercle unité $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$ est une partie connexe par arcs, car $\mathbb{U}$ est l'image de $[0, 2\pi]$ (qui est connexe par arcs en tant qu'intervalle) par la fonction continue $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,2\pi] & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array} \right.$.

Théorème 73 (Théorème des valeurs intermédiaires généralisé)
Soit $A \subset E$ une partie connexe par arcs, et $f : A \to \mathbb{R}$ continue.
Pour tout $(a,b) \in A^2$ et pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in A$ tel que $f(c) = \lambda$.

Preuve
D'après la proposition précédente, $f(A)$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}$, donc un intervalle (cf. prop. 71). L'élément λ, qui est compris entre deux éléments de $f(A)$, est donc lui-même dans $f(A)$.

<u>ATTENTION !</u>
On pourrait croire à tort que le "TVI classique" (pour les fonctions $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, démontré en MP2I)

est un corollaire de ce dernier résultat, mais il n'en est rien puisque pour montrer que les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles, on utilise déjà le "TVI classique" (cf. preuve théorème 71) !

VI Topologie en dimension finie

1) Equivalence des normes

Lemme 74 (Isomorphisme isométrique entre E et $\mathbb{K}^n$)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
Alors :

(i) L'application $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to E$ définie par

$$\varphi_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

est un isomorphisme linéaire, et l'isomorphisme réciproque $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} : E \to \mathbb{K}^n$ associe à un vecteur $x \in E$ ses coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.

(ii) L'application $\| \,.\, \|_{\infty,\mathcal{B}} : E \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\|x\|_{\infty,\mathcal{B}} = \|\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(x)\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

est une norme sur E.

Ainsi, $\varphi_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme isométrique (qui conserve la norme) entre les deux espaces normés $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ et $(E, \|.\|_{\infty,\mathcal{B}})$.

Preuve (non traitée en classe)
Vérifications très simples.

Remarque
Lorsqu'on fixe une base de E, cet espace de dimension finie est donc naturellement muni d'une structure d'espace vectoriel normé, calquée sur $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$. Toute partie $X \subset E$ possède alors les mêmes propriétés topologiques (ouvert, fermé, compact, ...) que la partie $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(X) \subset \mathbb{K}^n$, souvent plus facile à étudier. On en donne une illustration dans la démonstration du théorème suivant.

Théorème 75 (Equivalence des normes en dimension finie)
Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Preuve (traitée en MPI*)
Soit N une norme sur E, et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
Montrons que N est équivalente à la norme $\| \,.\, \|_{\infty,\mathcal{B}}$ introduite dans le lemme précédent.

- Tout d'abord, étant donné un vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E, on a par inégalité triangulaire et homogénéité :

$$N(x) = N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} N(x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| N(e_i) \leq C\|x\|_{\infty,\mathcal{B}},$$

  en posant $C = \sum_{i=1}^{n} N(e_i) \geq 0$. Donc N est dominée par $\| \,.\, \|_{\infty,\mathcal{B}}$.

- Pour montrer l'autre domination, on doit montrer que :

$$\exists C' > 0,\ \forall x \in E, \qquad \|x\|_{\infty,\mathcal{B}} \leq C' N(x),$$

  c'est-à-dire

$$\exists C' > 0,\ \forall x \in E \setminus \{0_E\}, \qquad N\left(\frac{x}{\|x\|_{\infty,\mathcal{B}}}\right) \geq \frac{1}{C'}$$

  (puisque l'inégalité est toujours vraie pour $x = 0_E$). Cela revient donc à montrer que la norme N est minorée par une constante strictement positive sur la sphère unité pour la norme $\|.\|_{\infty,\mathcal{B}}$, que l'on notera :

$$S(0,1) = \{y \in E,\ \|y\|_{\infty,\mathcal{B}} = 1\}.$$

Pour cela, montrons que $N : (E, \|.\|_{\infty,\mathcal{B}}) \to \mathbb{R}$ est continue et que $S(0,1)$ est une partie compacte de $(E, \|.\|_{\infty,\mathcal{B}})$.

* L'application $N : (E, \|.\|_{\infty,\mathcal{B}}) \to \mathbb{R}$ vérifie :

$$\forall (x,y) \in E^2, \qquad |N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq C\|x-y\|_{\infty,\mathcal{B}}$$

(d'après la première domination), donc N est lipschitzienne, donc continue **pour la norme** $\|.\|_\infty$.

* Introduisons la boule unité fermée :

$$\overline{B(0,1)} = \{y \in E,\ \|y\|_{\infty,\mathcal{B}} \leq 1\}.$$

Un vecteur $y = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i e_i \in E$ est dans $\overline{B(0,1)}$ si et seulement si $|y_i| \leq 1$ pour tout i.
Donc en posant $A = \{\lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| \leq 1\}$, la boule $\overline{B(0,1)}$ est l'image de A^n par l'isomorphisme isométrique $\varphi_{\mathcal{B}}$ du lemme précédent. Or, A est compact dans $(\mathbb{K}, |.|)$ (puisque $A = [-1,1]$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, et A est le disque unité fermé si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), donc A^n est compact dans $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ (d'après la prop. 61). On en déduit que $\overline{B(0,1)} = \varphi_{\mathcal{B}}(A^n)$ est compacte dans $(E, \|.\|_{\infty,\mathcal{B}})$.
Il s'ensuit que la sphère $S(0,1)$ est compacte (comme fermé inclus dans le compact $\overline{B(0,1)}$) dans l'espace normé $(E, \|.\|_{\infty,\mathcal{B}})$.

On peut donc appliquer le théorème des bornes atteintes (th. 63) : la fonction N est bornée et atteint son minimum sur $S(0,1)$, donc il existe $y_0 \in E$ non nul (car de norme 1) tel que $\forall y \in S(0,1),\ N(y) \geq N(y_0) > 0$. Il s'ensuit, pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$:

$$N\left(\frac{x}{\|x\|_{\infty,\mathcal{B}}}\right) \geq N(y_0),$$

c'est-à-dire

$$\|x\|_{\infty,\mathcal{B}} \leq C' N(x),$$

en posant $C' = \frac{1}{N(y_0)} > 0$, et cette inégalité reste vraie pour $x = 0_E$.

2) Conséquences

Corollaire 76 (Invariance des notions topologiques en dimension finie)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Alors :

(i) Le fait qu'une partie $A \subset E$ soit bornée, ouverte, fermée, compacte, connexe par arcs ne dépend pas du choix de la norme sur E.

(ii) Le fait qu'une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ soit bornée, convergente, ne dépend pas du choix de la norme sur E.

(iii) Si F est aussi un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, le fait qu'une application $f : X \subset E \to F$ soit continue ne dépend pas du choix des normes sur E et F.

Preuve
Direct d'après le théorème 75 et la prop. 27.

Remarque
Il y a donc une "topologie naturelle" en dimension finie. Elle est induite par n'importe quelle base $\mathcal{B}$ choisie sur E (par exemple via la norme $\|.\|_{\infty,\mathcal{B}}$). Les ouverts de cette topologie ne dépendent pas du choix de cette base (et donc de la norme choisie sur E), alors que les boules, si.

Corollaire 77 (Convergence des suites par coordonnées)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_k) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons

$$u_k = u_{k,1}e_1 + \cdots + u_{k,n}e_n$$

la décomposition de u_k dans la base $\mathcal{B}$.
Alors, la suite (u_k) converge dans E si et seulement si les suites coordonnées $(u_{k,i})$ $(1 \leq i \leq n)$ convergent dans $\mathbb{K}$, et dans ce cas, on a

$$\lim_{k\to+\infty} u_k = \sum_{i=1}^{n} \left(\lim_{k\to+\infty} u_{k,i}\right) e_i.$$

Preuve
Il suffit de munir E de la norme $\|.\|_{\infty,\mathcal{B}}$ et de traduire la convergence de la suite (u_k) pour cette norme : en notant $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i e_i \in E$, on a

$$u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \|u_k - \ell\|_{\infty,\mathcal{B}} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \iff \sup_{1\leq i\leq n} |u_{k,i} - \ell_i| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On est alors ramené à une convergence dans l'espace normé $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$: en notant $U_k = (u_{k,1}, \cdots, u_{k,n}) \in \mathbb{K}^n$ et $L = (\ell_1, \cdots, \ell_n) \in \mathbb{K}^n$, on a alors

$$u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \|U_k - L\|_\infty \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \underset{cf.\ CH.5}{\iff} \forall i \in \{1, \cdots, n\},\ u_{k,i} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_i.$$

Exemple (Suite de polynômes)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans $E = \mathbb{R}_n[X]$, la suite (P_k) définie par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad P_k = \sum_{i=0}^{n} a_{k,i} X^i$$

converge si et seulement si chaque suite réelle $(a_{k,i})_{k\in\mathbb{N}}$ converge lorsque $k \to \infty$, et dans ce cas, on a

$$\lim_{k\to+\infty} P_k = \sum_{i=0}^{n} \left(\lim_{k\to+\infty} a_{k,i}\right) X^i.$$

En effet, en notant $\mathcal{B} = (1, X, \cdots, X^n)$ la base canonique de E, on a

$$[P_k]_{\mathcal{B}} = (a_{k,0}, \cdots, a_{k,n}).$$

Exemple (Suite de matrices)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ converge si et seulement si chaque suite de coefficients $(A_k[i,j])_{k\in\mathbb{N}}$ converge et dans ce cas, on a

$$\lim_{k\to+\infty} A_k = \begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to+\infty} A_k[1,1] & \cdots & \lim\limits_{k\to+\infty} A_k[1,n] \\ \lim\limits_{k\to+\infty} A_k[2,1] & \cdots & \lim\limits_{k\to+\infty} A_k[2,n] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lim\limits_{k\to+\infty} A_k[n,1] & \cdots & \lim\limits_{k\to+\infty} A_k[n,n] \end{pmatrix}$$

Corollaire 78 (Limite d'une fonction par coordonnées)
Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, muni d'une base $\mathcal{B}_F = (e_1, \cdots, e_p)$.
On considère une fonction $f : X \subset E \to F$, et un point $a \in \overline{X}$. Pour tout $x \in X$, on note

$$f(x) = f_1(x)e_1 + \cdots + f_p(x)e_p$$

la décomposition du vecteur $f(x)$ dans la base $\mathcal{B}_F$.
Alors f possède une limite lorsque $x \to a$ si et seulement si les fonctions coordonnées $f_i : X \subset E \to \mathbb{K}$ $(1 \leq i \leq p)$ possèdent une limite lorsque $x \to a$, et dans ce cas, on a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \sum_{i=1}^{p} \left(\lim_{x \to a} f_i(x) \right) e_i.$$

Remarque
Dans le cas où $a \in X$, on obtient en particulier que f est continue en a si et seulement si chaque fonction coordonnée f_i est continue en a. Et ceci ne dépend pas de la base $\mathcal{B}_F$ choisie à l'arrivée.

Preuve
Munir F de la norme $\|.\|_{\infty, \mathcal{B}_F}$, puis utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et le corollaire précédent.

Exemple (Fonction à valeurs matricielles)
On considère la fonction $M : \mathbb{R}^* \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \qquad M(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-1/t^2} \\ e^{-1/t^2} & e^t \end{pmatrix}.$$

Alors, $\lim_{t \to 0} M(t) = I$ (la matrice identité). Pour le voir, décomposer $M(t)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (formée des 4 matrices élémentaires $E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}$.).

Exemple (Fonction à valeurs complexes)
Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ possède une limite en $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si les fonctions $f_1 = Re(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f_2 = Im(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possèdent une limite finie en a. Et dans ce cas, on a

$$\lim_{t \to a} f(t) = \lim_{t \to a} f_1(t) + i \lim_{t \to a} f_2(t).$$

Normal, car (f_1, f_2) sont les fonctions coordonnées de f dans la base $(1, i)$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

3) Caractérisation des parties compactes et conséquences

Théorème 79 (Caractérisation des parties compactes en dimension finie)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et soit $A \subset E$.
A est compacte si et seulement si A est fermée et bornée.

Preuve (traitée en MPI*)
Fixons une base $\mathcal{B}$ de E et munissons E de la norme $\|.\|_{\infty, \mathcal{B}}$.
On sait déjà que les parties compactes de E sont fermées et bornées.
Montrons la réciproque : si A est fermée et bornée, alors il existe $M > 0$ tel que A est inclus dans la boule fermée $\overline{B(0, M)}$.
Or, la boule $\overline{B(0, M)}$ est une partie compacte de $(E, \|.\|_{\infty, \mathcal{B}})$ (car c'est l'image par l'isomorphisme isométrique φ_B de l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{K},\ |\lambda| \leq M\}^n$, qui est une partie compacte de $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$, voir preuve du théorème 75). Donc A est également compacte, comme partie fermée incluse dans un compact (voir prop. 59).

Corollaire 80 (Suites bornées et valeurs d'adhérence en dimension finie)
Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie possède au moins une valeur d'adhérence, et elle converge si et seulement si cette valeur d'adhérence est unique.

Preuve
Si E est de dimension finie, alors toute suite bornée est à valeurs dans une boule fermée, donc dans un compact d'après le théorème précédent. Elle possède donc au moins une valeur d'adhérence. De plus, on a l'équivalence voulue en utilisant le théorème 60.

ATTENTION !
C'est faux si E est de dimension infinie ! Une suite bornée ne possède pas toujours de valeur d'adhérence !

Exemple
Dans $E = \ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ (les suites bornées), muni de $\|.\|_\infty$ on considère la "suite de suites" $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u^{(n)} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ k & \longmapsto & u_k^{(n)} = \delta_{k,n} \end{array} \right. .$$

Cette suite $(u^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$ est bornée car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u^{(n)}\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |u_k^{(n)}| = 1$.

Mais $(u^{(n)})$ ne possède pas de valeur d'adhérence car deux termes distincts sont toujours distants de 1 :

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \quad (m \neq n) \implies \|u^{(m)} - u^{(n)}\|_\infty = 1,$$

et ceci empêche la convergence de $(u^{(\varphi(n))})$ pour toute fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, puisque $\|u^{(\varphi(n+1))} - u^{(\varphi(n))}\|_\infty$ ne tend pas vers 0.

Corollaire 81 (Topologie des sev de dimension finie)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé. Tout sous-espace vectoriel de dimension finie de E est fermé.

Preuve
Soit F un sev de dimension finie de E, et soit $(u_n) \in F^\mathbb{N}$ une suite qui converge vers $\ell \in E$. La suite (u_n) est bornée (car convergente) et à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie (F), donc elle possède une valeur d'adhérence dans F (d'après le corollaire précédent), qui est nécessairement ℓ (par unicité de la limite dans E). On a donc $\ell \in F$, ce qui prouve que F est fermé.

Remarque
Le point subtil dans la démonstration précédente est le suivant : si F est un sev de E, alors les suites bornées de $E^\mathbb{N}$ à valeurs dans F sont exactement les suites bornées de $F^\mathbb{N}$. En effet, la norme induite sur le sev F est la même norme que celle sur E, donc le fait d'être bornée ne dépend pas du sev dans lequel la suite prend ses valeurs.

4) Continuité en dimension finie

Théorème 82 (Continuité des applications linéaires en dimension finie)
Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Si E est de dimension finie, alors toute application linéaire $u : E \to F$ est continue.

Preuve
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Fixons une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E et munissons E de la norme $\|.\|_{\infty,\mathcal{B}}$.
Pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de E, on a

$$\|u(x)\|_F = \left\| \sum_{i=1}^n x_i u(e_i) \right\|_F \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|u(e_i)\|_F \leq C\|x\|_{\infty,\mathcal{B}},$$

en posant $C = \sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|_F \geq 0$. Donc u est continue d'après le théorème 52.

Remarque
Si E est de dimension finie, on a donc $\mathcal{L}(E,F) = \mathcal{L}_c(E,F)$.

Définition 83 (Application polynomiale sur $\mathbb{K}^n$)
On dit qu'une application $p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est **polynomiale** *si elle est combinaison linéaire de fonctions du type $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ (appelées* **monômes***), avec les $\alpha_i \in \mathbb{N}$.*

Vocabulaire
On dit aussi "fonction polynôme".

Théorème 84 (Continuité des applications polynomiales de $\mathbb{K}^n$)
Toute application polynomiale $p : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est continue.

Preuve
Tout d'abord, chaque "projection" $\pi_j : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ définie par $\pi_j(x) = x_j$ est linéaire en dimension finie, donc continue (pour $j \in \{1, \cdots, n\}$).
On utilise ensuite que $\mathcal{C}^0(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre (voir. th. 44) :

- Tout monôme est un produit (éventuellement vide) de projections p_j, donc une fonction continue.
- Toute application polynomiale est une combinaison linéaire de monômes, donc également une fonction continue.

Théorème 85 (Continuité des applications polynomiales en dimension finie)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors toute application $p : E \to \mathbb{K}$ polynomiale en les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ est continue.

Preuve
Reprenons l'isomorphisme isométrique $\varphi_{\mathcal{B}} : \mathbb{K}^n \to E$ défini par

$$\varphi_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

L'application $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} : E \to \mathbb{K}^n$ associe à un vecteur $x \in E$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
Une application $p : E \to \mathbb{K}$ polynomiale en les coordonnées est donc de la forme

$$p = q \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1},$$

où $q : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est polynomiale, donc continue, et $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ est également continue, puisque linéaire sur un espace de dimension finie, donc par composition, p est continue.

Théorème 86 (Continuité des applications bilinéaires en dimension finie)
Soient E, F, G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Si E et F sont de dimension finie, alors toute application bilinéaire $b : E \times F \to G$ est continue.

Preuve
Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, \cdots, f_p)$ une base de F. Pour tous vecteurs $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$ et $y = \sum_{j=1}^{p} y_j f_j \in F$, on a

$$\|b(x,y)\|_G = \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} x_i y_j b(e_i, f_j) \right\|_G \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} |x_i||y_j| \|b(e_i, f_j)\|_G \leq C \|x\|_{\infty, \mathcal{B}_E} \|y\|_{\infty, \mathcal{B}_F},$$

en posant $C = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \|b(e_i, f_j)\|_G \geq 0$, ce qui montre que b est continue d'après le th. 55.

Théorème 87 (Continuité des applications multilinéaires en dimension finie)
Soient $E_1, \cdots, E_n, F$ des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.
Si $E_1, \cdots, E_n$ sont de dimension finie, alors toute application multilinéaire $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ est continue.

Preuve
Similaire au cas d'une application bilinéaire.

Terminons par une liste (non exhaustive) d'exemples classiques.

Exemple (Déterminant d'une famille de vecteurs)
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B}$ une base de E.
L'application $\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$ (qui à une famille $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$ associe son déterminant dans la base $\mathcal{B}$) est continue, car multilinéaire.

Exemple (Déterminant d'une matrice)
L'application $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ (qui à une matrice carrée associe son déterminant) est continue, car polynomiale en les coordonnées dans la base canonique $(E_{i,j})$ (formée des matrices élémentaires).
En effet, en notant

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} E_{i,j},$$

on a

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}.$$

Exemple (Produit matriciel)
L'application $p : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array} \right.$ est bilinéaire sur un espace de dimension finie, donc continue.

Exemple (Composition d'applications linéaires en dimension finie)
Si E, F, G sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ (u, v) & \longmapsto & v \circ u \end{array} \right.$$

est bilinéaire sur un espace de dimension finie, donc continue.

Exemple (Un peu de topologie matricielle)
Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- $GL_n(\mathbb{K})$ est une partie ouverte (et on peut même montrer qu'elle est dense, voir les exercices) ;
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: le groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte.