CH06 : Espaces préhilbertiens et groupe orthogonal

I Projections orthogonales

E désigne un espace préhilbertien réel (pas nécessairement de dimension finie). On note $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire, et $\|.\|$ la norme associée.

1) Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie

Théorème 1 (L'orthogonal d'un sev de dim finie est un supplémentaire)
Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Alors le sev $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E (i.e. $E = F \oplus F^\perp$).

Vocabulaire
On parle alors de **supplémentaire orthogonal**.

Corollaire 2 (Dimension de l'orthogonal en dimension finie)
Soit E un espace **euclidien**. *Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a*

$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F).$$

Corollaire 3 (Double orthogonal d'un sev de dim finie)
Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors

$$(F^\perp)^\perp = F.$$

2) Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

Dans la suite, on fixe un espace préhilbertien réel E.

Définition 4 (Projection orthogonale)
Soit F un sev de dimension finie de E. On appelle **projection orthogonale sur** F *le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$. On notera $p_F : E \to E$ cette application.*

Propriété 5 (Propriétés d'une projection orthogonale)
Soit F un sev de dimension finie de E , et p_F la projection orthogonale sur F.

- *(i) On a $p_F \in \mathcal{L}(E, E)$ et $p_F \circ p_F = p_F$.*
- *(ii) On a la décomposition $E = Im(p_F) \oplus Ker(p_F)$, avec*

$$Im(p_F) = Ker(p_F - Id_E) = F \quad \text{et} \quad Ker(p_F) = F^\perp = Im(p_F)^\perp.$$

- *(iii) $\forall x \in E$, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de E tel que* $\begin{cases} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \in F^\perp \end{cases}$.

Propriété 6 (Expression d'une projection orthogonale en base orthonormée)
Soit F un sev de dimension finie de E, et $(e_1, \cdots, e_r)$ une base **orthonormée** *de F. Alors on a l'expression :*

$$\forall x \in E, \qquad p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} (x|e_i)e_i.$$

3) Symétrie orthogonale, réflexion

Définition 7 (Symétrie orthogonale)
Soit F un sev de dimension finie de E. On appelle **symétrie orthogonale par rapport à F** *la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^{\perp}$. On notera $\sigma_F : E \to E$ cette application.*

Vocabulaire
Dans le cas particulier où E est de dimension finie et F est un hyperplan de E (i.e. $\dim(F) = \dim(E) - 1$), on parle de **réflexion par rapport à** F.

Propriété 8 (Propriétés d'une symétrie orthogonale)
Soit F un sev de dimension finie de E, et σ_F la symétrie orthogonale par rapport à F.

(i) *On a $\sigma_F \in \mathcal{L}(E, E)$ et $\sigma_F \circ \sigma_F = Id_E$.*

(ii) *On a la décomposition $Ker(\sigma_F - Id_E) \oplus Ker(\sigma_F + Id_E) = E$, avec*

$$F = Ker(\sigma_F - Id_E) \quad \textit{et} \quad F^{\perp} = Ker(\sigma_F + Id_E).$$

(iii) *Pour tout $x \in E$, on a $\sigma_F(x) = 2p_F(x) - x$. D'où $\sigma_F = 2p_F - Id_E$.*

4) Distance d'un point à un sev de dimension finie

On rappelle que si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, la distance d'un point $x \in E$ à une partie non vide $A \subset E$ est le réel positif :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

On étudie ici le problème de calcul de distance dans notre cadre préhilbertien.

Théorème 9 (Distance atteinte par la projection orthogonale)
Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Alors, pour tout $x \in E$, la distance **$d(x, F)$ est atteinte en un seul point** *: le projeté orthogonal $p_F(x)$.*
En d'autres termes :

$$\forall x \in E, \ \forall y \in F, \quad \|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|,$$

avec égalité si et seulement si $y = p_F(x)$.

Corollaire 10 (Autre formule de la distance)
Avec les notations précédentes, on a aussi

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2.$$

5) Inégalité de Bessel

Propriété 11 (Inégalité de Bessel)
Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille orthonormée de E. Alors

$$\forall x \in E, \qquad \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 \leq \|x\|^2.$$

Corollaire 12 (Inégalité de Bessel pour une suite orthonormée)
Si $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite orthonormée de E, alors pour tout $x \in E$, la série $\sum_{k \geq 0} (x|e_k)^2$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x|e_k)^2 \leq \|x\|^2.$$

Dans la suite du chapitre, E désigne un espace euclidien (c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie), non réduit à $\{0_E\}$.

II Isométries vectorielles d'un espace euclidien

1) Définition et premières propriétés

Définition 13 (Isométrie vectorielle)
Une **isométrie vectorielle** *de E est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ qui conserve la norme, c'est-à-dire $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.*

Propriété 14 (Equivalence avec la conservation du produit scalaire)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence :

$$u \text{ est une isométrie vectorielle} \iff \forall (x;y) \in E^2, \quad (u(x)|u(y)) = (x|y).$$

Vocabulaire
Les isométries vectorielles sont parfois appelées **endomorphismes orthogonaux**, car elles conservent l'orthogonalité :

$$x \perp y \iff (x|y) = 0 \iff (u(x)|u(y)) = 0 \iff u(x) \perp u(y).$$

On parle même **d'automorphismes orthogonaux**, puisque les isométries sont bijectives (voir prop. suivante).

Notation
On notera $\boldsymbol{\mathcal{O}(E)}$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Propriété 15 (Structure de groupe de $\mathcal{O}(E)$)
L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$, donc un groupe.
On appelle $\mathcal{O}(E)$ le **groupe orthogonal** *de E.*

2) Conservation des bases orthonormées

Propriété 16 (Conservation des bases orthonormées)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, les assertions suivantes sont **équivalentes** *:*

(i) $u \in \mathcal{O}(E)$;

(ii) Pour toute base **orthonormée** $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ *de E, la famille image $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E ;*

(iii) Il existe une base **orthonormée** $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ *de E telle que la famille image $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E.*

III Matrices orthogonales

Dans la suite, n désigne un entier naturel non nul.

1) Définition et propriétés

Propriété 17 (Représentation d'une isométrie vectorielle dans une b.o.n)
Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base **orthonormée** *de E.*
On note $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Alors $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^\top$.

Ceci amène la définition suivante :

Définition 18 (Matrice orthogonale)
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** *lorsque $A^\top \times A = I_n$.*

Notation
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on notera $\boldsymbol{\mathcal{O}_n}(\mathbb{R})$ (ou encore $\boldsymbol{\mathcal{O}(n)}$) l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété 19 (Structure de groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$)
L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$, donc un groupe.
On appelle $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le **groupe orthogonal matriciel d'ordre $\boldsymbol{n}$**.

Propriété 20 (Correspondance $\mathcal{O}(E)/\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** *de E. Alors on a*

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff Mat_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

On donne ici une caractérisation des matrices orthogonales à partir d'une propriété géométrique sur les colonnes.

Propriété 21 (Diverses caractérisations des matrices orthogonales)
Les assertions suivantes sont **équivalentes** *:*

(i) $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;

(ii) les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique) ;

(iii) $A^\top \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;

(iv) les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Propriété 22 (Changement de bases orthonormées)
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E et soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$$\mathcal{B}' \text{ est une base orthonormée de } E \iff P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

Dans ce cas, on a de plus $Mat_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = P^\top$.

Corollaire 23 (Changement de bases orthonormées pour les endomorphismes)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E.
Alors, en notant $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(u)$ et $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$, on a $A' = P^\top AP$.

Vocabulaire
On dira que deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont **orthogonalement semblables** lorsqu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $A' = P^{-1}AP = P^\top AP$, ce qui implique évidemment qu'elles sont semblables.

2) Caractérisation des symétries orthogonales

Propriété 24 (Les symétries orthogonales sont des isométries)
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors, la symétrie orthogonale par rapport à F, notée σ_F, appartient à $\mathcal{O}(E)$.

Propriété 25 (Caractérisation des symétries orthogonales)
Soit E un espace euclidien, soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** *de E.*
On note $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Alors :

$$u \text{ est une symétrie orthogonale} \iff A \text{ est orthogonale et symétrique.}$$

IV Signe d'une isométrie vectorielle

E désigne toujours un espace euclidien non nul et n un entier naturel non nul.

1) Isométries positives / négatives

Propriété 26 (Déterminant d'une isométrie vectorielle / d'une matrice orthogonale)

(i) Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(A) = \pm 1$.

(ii) Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors $\det(u) = \pm 1$.

Définition 27 (Isométries vectorielles positives/négatives)
Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. On dit que

(i) u est une **isométrie positive** *(ou "directe") si* $\det(u) = 1$,

(ii) u est une **isométrie négative** *(ou "indirecte") si* $\det(u) = -1$.

Notation
On notera $\mathcal{SO}(E)$ (ou $\mathcal{O}^+(E)$) l'ensemble des isométries vectorielles positives de E, et $\mathcal{O}^-(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles négatives de E.
Formellement :

$$\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E),\ \det(u) = 1\}.$$

Propriété 28 (Structure de groupe de $\mathcal{SO}(E)$)
L'ensemble $\mathcal{SO}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$, donc un groupe.
On l'appelle **groupe spécial orthogonal** *de E.*

Définition 29 (Groupe spécial orthogonal matriciel)
On définit

$$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \det(A) = 1\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^\top \times A = I_n,\ \det(A) = 1\}.$$

(on le note aussi $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{SO}(n)$). On définit également

$$\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \det(A) = -1\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^\top \times A = I_n,\ \det(A) = -1\}.$$

Propriété 30 (Structure de groupe de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$)
L'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$, donc un groupe.

Propriété 31 (Correspondance $\mathcal{SO}(E)$ / $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$)
Soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** *de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$u \in \mathcal{SO}(E) \iff Mat_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}).$$

2) Action sur l'orientation des bases

On rappelle que dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, on a, pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et toute famille de vecteurs $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_n)$:

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0.$$

Définition 32 (Orientation d'un espace vectoriel réel)
Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dit **orienté** *lorsqu'on choisit une base $\mathcal{B}_0$ de référence.*
Dans ce cas, on appelle :

- *bases* **directes** *les bases $\mathcal{B}$ telles que* $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$ *;*
- *bases* **indirectes** *les bases $\mathcal{B}$ telles que* $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$.

On dit que deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont **même orientation** *lorsque* $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.

Propriété 33 (Isométries positives et orientation)
Soit E un espace euclidien orienté et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

(*i*) *Si $u \in \mathcal{SO}(E)$, alors u préserve les bases orthonormées directes et indirectes de E (c'est-à-dire que pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E de même orientation que $\mathcal{B}$)*

(*ii*) *Réciproquement, s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $u(\mathcal{B})$ soit une base orthonormée de E de même orientation que $\mathcal{B}$, alors $u \in \mathcal{SO}(E)$.*

Corollaire 34 (Indépendance du déterminant vis-à-vis des b.o.n.d)
Soit E un espace euclidien orienté de dimension n.
Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors, le nombre $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$ ne dépend pas de la base orthonormée **directe** *de E choisie.*

V Groupe orthogonal en dimension 2

Etudions maintenant ce qui se passe **en dimension** 2, dans un **plan euclidien** E.

1) Description de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

La connaissance du groupe orthogonal matriciel $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ suffit à connaître $\mathcal{O}(E)$.

Propriété 35 (Description de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$)

(i) Les matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *avec $\theta \in \mathbb{R}$.*

(ii) Les matrices de $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ *avec $\varphi \in \mathbb{R}$.*

Définition 36 (Matrices de rotation)
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on notera $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.
On l'appelle **matrice de rotation d'angle** θ *(le réel θ est unique à 2π près).*

Propriété 37 (Le groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif)
Pour tous $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, on a $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} \times R_\theta$.
En particulier, le groupe $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ est commutatif, et l'application

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

2) Description de $\mathcal{SO}(E)$

Propriété 38 (Invariance de la matrice de $u \in \mathcal{SO}(E)$ dans une b.o.n.d)
Soit E un espace euclidien de dimension 2 **orienté**, *et soit $u \in \mathcal{SO}(E)$.*
Alors, il existe un unique réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que **pour toute base orthonormée directe** $\mathcal{B}$ *de E, $Mat_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$.*

La proposition précédente donne un sens à la définition suivante :

Définition 39 (Rotation plane d'angle θ)
Soit E un espace euclidien de dimension 2 **orienté**. *Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la* **rotation vectorielle d'angle** θ, *notée r_θ, est l'unique endomorphisme de E dont la matrice dans* **toute** *base orthonormée* **directe** *est R_θ.*

Corollaire 40 (Nature des isométries positives en dimension 2)
Si E est un espace euclidien de dimension 2, alors les éléments de $\mathcal{SO}(E)$ sont exactement les rotations vectorielles.

3) Description de $\mathcal{O}^-(E)$

On va maintenant étudier les $u \in \mathcal{O}(E)$ tels que $\det(u) = -1$.

Propriété 41 (Nature des isométries négatives en dimension 2)
Si E est un espace euclidien de dimension 2, alors les éléments de $\mathcal{O}^-(E)$ sont exactement les symétries orthogonales **par rapport à une droite**. *Ce sont donc les réflexions du plan E.*

4) Classification des isométries en dimension 2

Théorème 42 (Classification des isométries en dimension 2)
Soit E un espace euclidien de dimension 2 et soit $u \in \mathcal{O}(E)$.
On dispose de la classification suivante :

$\det(u)$	*Forme réduite dans une b.o.n.d adaptée*	*Nature géométrique de u*
1	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *avec* $\theta \neq 0\ [\pi]$	*Rotation vectorielle d'angle* $\theta \neq 0\ [\pi]$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Id_E
1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$-Id_E$
-1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	*Réflexion par rapport à la droite* $Ker(u - Id_E)$

On dispose aussi de la classification suivante, suivant la dimension des invariants :

$\dim(Ker(u - Id_E))$	*Nature géométrique de u*	$\det(u)$
0	*Rotation vectorielle différente de* Id_E	1
1	*Réflexion par rapport à la droite* $Ker(u - Id_E)$	-1
2	Id_E	1