CH06 : Espaces préhilbertiens et groupe orthogonal

Table des matières

I Projections orthogonales

E désigne un espace préhilbertien réel (pas nécessairement de dimension finie). On note $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire, et $\|.\|$ la norme associée.

1) Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie

Théorème 1 (L'orthogonal d'un sev de dim finie est un supplémentaire)
Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors le sev $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E (i.e. $E = F \oplus F^\perp$).

Vocabulaire
On parle alors de **supplémentaire orthogonal**.

Preuve
On a $F \cap F^\perp = \{0_E\}$, car les sous-espaces F et $F^\perp$ sont orthogonaux. Montrons ensuite que $E \subset F + F^\perp$. On choisit une base orthonormée $(e_1, \dots, e_r)$ du sev F (elle existe d'après le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt), et on procède par analyse-synthèse pour montrer que tout vecteur $x \in E$ se décompose sur le sev somme $F + F^\perp$.

- Si $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F = Vect(e_1, \cdots, e_r)$, et $x_2 \in F^\perp = \{e_1, \cdots, e_r\}^\perp$, alors on a
$$x_1 = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_k,$$
avec les $\lambda_k \in \mathbb{R}$. On détermine alors les λ_k en calculant des produits scalaires : pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, on a
$$(x|e_i) = \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k e_k + x_2 \middle| e_i \right) = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \underbrace{(e_k|e_i)}_{=\delta_{k,i}} + \underbrace{(x_2|e_i)}_{=0} = \lambda_i.$$
On en déduit donc
$$x_1 = \sum_{i=1}^{r} (x|e_i) e_i, \qquad x_2 = x - \sum_{i=1}^{r} (x|e_i) e_i.$$
- Pour $x \in E$, posons
$$x_1 = \sum_{i=1}^{r} (x|e_i) e_i, \qquad x_2 = x - \sum_{i=1}^{r} (x|e_i) e_i.$$
On observe que $x_1 \in F$, et $x_2 \in F^\perp = \{e_1, \dots, e_r\}^\perp$, car $\forall j \in \{1, \dots r\}$,
$$(x_2|e_j) = (x|e_j) - \sum_{i=1}^{r} (x|e_i)(e_i|e_j) = (x|e_j) - \sum_{i=1}^{r} (x|e_i)\delta_{i,j} = 0.$$
Donc on a l'existence de la décomposition voulue.

Remarque
Pour construire une base orthonormée de E adaptée à la somme $E = F \oplus F^\perp$, il suffit donc de **réunir une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$**.

ATTENTION !
En général, le sev F possède **d'autres supplémentaires** que $F^\perp$.

Corollaire 2 (Dimension de l'orthogonal en dimension finie)
Soit E un espace **euclidien**. *Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a*
$$\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F).$$

Preuve
On a $E = F \oplus F^\perp$ et E de dimension finie, donc $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$.

Exemple
Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, l'orthogonal d'une droite vectorielle est un plan vectoriel, et réciproquement.

Corollaire 3 (Double orthogonal d'un sev de dim finie)
Soit E un espace préhilbertien réel, et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors

$$(F^\perp)^\perp = F.$$

Preuve

- L'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$ est facile, puisque si $x \in F$, alors x est orthogonal à tous les éléments de $F^\perp$, on a donc $x \in (F^\perp)^\perp$.
- L'inclusion réciproque utilise le théorème précédent. Soit $x \in \left(F^\perp\right)^\perp$. Alors, puisque $E = F \oplus F^\perp$, le vecteur x se décompose de manière unique :

$$x = x_1 + x_2, \qquad (x_1, x_2) \in F \times F^\perp.$$

  Or, $(x|x_2) = 0$ (puisque $x_2 \in F^\perp$ et $x \in (F^\perp)^\perp$), ainsi que $(x_1|x_2) = 0$ (puisque $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$). Donc

$$0 = (x|x_2) = (x_1 + x_2|x_2) = (x_1|x_2) + (x_2|x_2) = (x_2|x_2),$$

  ce qui entraîne $x_2 = 0_E$ et donc $x = x_1 \in F$.

2) Projection orthogonale sur un sev de dimension finie

Dans la suite, on fixe un espace préhilbertien réel E.

Définition 4 (Projection orthogonale)
Soit F un sev de dimension finie de E. On appelle **projection orthogonale sur** F *le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$. On notera $p_F : E \to E$ cette application.*

Remarque

- *Cette définition a un sens car $E = F \oplus F^\perp$. Tout vecteur $x \in E$ se décompose donc de manière unique en $x = x_1 + x_2$, avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$. Par définition d'un projecteur, on a $p_F(x) = x_1$.*
- *On dispose donc aussi de la projection orthogonale sur $F^\perp$, et on a $p_F + p_{F^\perp} = Id_E$.*

Dessin (Projection orthogonale sur un plan F d'un espace E de dimension 3)

ATTENTION !
Si E est de dimension infinie et F de dimension finie, alors $F^\perp$ est de dimension infinie.

Propriété 5 (Propriétés d'une projection orthogonale)
Soit F un sev de dimension finie de E , et p_F la projection orthogonale sur F.

(i) On a $p_F \in \mathcal{L}(E, E)$ et $p_F \circ p_F = p_F$.

(ii) On a la décomposition $E = Im(p_F) \oplus Ker(p_F)$, avec

$$Im(p_F) = Ker(p_F - Id_E) = F \quad et \quad Ker(p_F) = F^\perp = Im(p_F)^\perp.$$

(iii) $\forall x \in E$, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de E tel que $\begin{cases} p_F(x) \in F \\ x - p_F(x) \in F^\perp \end{cases}$.

Preuve
Evident en utilisant les propriétés (déjà connues) des projecteurs.

Remarque
Le théorème de Pythagore donne la relation utile :

$$\forall x \in E, \qquad \|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2,$$

puisque les vecteurs $p_F(x)$ et $x - p_F(x)$ sont orthogonaux par définition de p_F. En particulier, on obtient $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$ (une projection orthogonale réduit la norme).

Propriété 6 (Expression d'une projection orthogonale en base orthonormée)
Soit F un sev de dimension finie de E, et $(e_1, \cdots, e_r)$ une base **orthonormée** *de F. Alors on a l'expression :*

$$\forall x \in E, \qquad p_F(x) = \sum_{i=1}^{r} (x|e_i)e_i.$$

Preuve
On reprend la preuve du théorème 1, où l'on a montré que $E = F \oplus F^\perp$: tout vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique sous la forme

$$x = x_1 + x_2, \qquad x_1 = \sum_{i=1}^{r} (x|e_i)e_i \in F, \quad x_2 = x - x_1 \in F^\perp.$$

Par définition de la projection orthogonale sur F, on a $p_F(x) = x_1 = \sum_{i=1}^{r} (x|e_i)e_i$.

<u>ATTENTION !</u>
Dans l'expression du projeté orthogonal de x sur F, l'entier r (nombre de termes de la somme) est **la dimension du sous-espace $\boldsymbol{F}$**, pas celle de E !

Exemple
Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, calculer la projection orthogonale sur le plan $F = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, notée $p_F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

<u>Deux méthodes :</u>

1) On construit une base orthonormée de F et on utilise l'expression d'une projection orthogonale en base orthonormée.

   On trouve $\forall (x, y, z) \in E, \qquad p_F(x, y, z) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x + y - z \\ x + 2y + z \\ -x + y + 2z \end{pmatrix}$.

2) Pour $v \in \mathbb{R}^3$, on utilise la caractérisation du projeté $p_F(v)$: c'est l'unique vecteur de $\mathbb{R}^3$ tel que

$$\begin{cases} p_F(v) \in F \\ v - p_F(v) \in F^\perp. \end{cases}$$

   Remarque
   Cette seconde méthode est plus générale, elle sert à calculer aussi des projecteurs non orthogonaux.

Exemple
On se place dans $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique :

$$(A|B) = Tr(A^\top B) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

1. *Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (sev des matrices symétriques) et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ (sev des matrices antisymétriques) sont des supplémentaires orthogonaux de E.*
2. *Déterminer la projection orthogonale sur $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.*

On obtient, pour toute matrice $A \in E$,

$$p_F(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top).$$

Remarque (sur les formules de Gram-Schmidt)
Etant donnée une famille libre $(u_1, \cdots, u_n)$ de E, on note

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, \qquad F_k := Vect(u_1, u_2, \cdots, u_k).$$

On a donc

$$\dim(F_k) = k \text{ et } \{0_E\} \subsetneq F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{n-1} \subsetneq F_n \subset E.$$

(on dit que les espaces F_k forment "un drapeau").
Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt permet de construire explicitement une famille $(e_1, \cdots, e_n)$ **orthonormée**, *et* **adaptée au drapeau** *formé par les $(F_k)_{1 \leq k \leq n}$, c'est-à-dire que*

$$\forall k \in \{1, \cdots n\}, \qquad F_k = Vect(e_1, e_2, \cdots, e_k).$$

Pour cela on pose successivement :

$$e_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|}, \qquad \forall k \in \{1, \cdots, n-1\}, \quad e_{k+1} := \frac{u_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (u_{k+1}|e_i)e_i}{\left\| u_{k+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{k} (u_{k+1}|e_i)e_i \right\|}.$$

Ces formules peuvent se réécrire à l'aide de projections orthogonales successives sur les différents sous-espaces du drapeau :

$$e_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|}, \qquad \forall k \in \{1, \cdots, n-1\}, \; e_{k+1} := \frac{u_{k+1} - p_{F_k}(u_{k+1})}{\|u_{k+1} - p_{F_k}(u_{k+1})\|}.$$

3) Symétrie orthogonale, réflexion

Définition 7 (Symétrie orthogonale)
Soit F un sev de dimension finie de E. On appelle **symétrie orthogonale par rapport à F** *la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$. On notera $\sigma_F : E \to E$ cette application.*

Vocabulaire
Dans le cas particulier où E est de dimension finie et F est un hyperplan de E (i.e. $\dim(F) = \dim(E) - 1$), on parle de **réflexion par rapport à** F.

Dessin (Symétrie orthogonale par rapport à une droite F d'un espace E de dimension 2)

Dessin (Symétrie orthogonale par rapport à un plan F d'un espace E de dimension 3)

Propriété 8 (Propriétés d'une symétrie orthogonale)
Soit F un sev de dimension finie de E, et σ_F la symétrie orthogonale par rapport à F.

(i) On a $\sigma_F \in \mathcal{L}(E, E)$ et $\sigma_F \circ \sigma_F = Id_E$.

(ii) On a la décomposition $Ker(\sigma_F - Id_E) \oplus Ker(\sigma_F + Id_E) = E$, avec

$$F = Ker(\sigma_F - Id_E) \quad \text{et} \quad F^\perp = Ker(\sigma_F + Id_E).$$

(iii) Pour tout $x \in E$, on a $\sigma_F(x) = 2p_F(x) - x$. D'où $\sigma_F = 2p_F - Id_E$.

Preuve
Cela résulte des propriétés des symétries (déjà connues).

Exemple
Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique, calculer la réflexion par rapport au plan $F = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

On a déjà calculé la projection orthogonale sur le plan F (voir avant) :

$$\forall v = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E, \qquad p_F(v) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x+y-z\\x+2y+z\\-x+y+2z\end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$\sigma_F(v) = 2p_F(v) - v = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}2x+y-z\\x+2y+z\\-x+y+2z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}x+2y-2z\\2x+y+2z\\-2x+2y+z\end{pmatrix}.$$

4) Distance d'un point à un sev de dimension finie

On rappelle que si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé, la distance d'un point $x \in E$ à une partie non vide $A \subset E$ est le réel positif :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

On étudie ici le problème de calcul de distance dans notre cadre préhilbertien.

Théorème 9 (Distance atteinte par la projection orthogonale)
Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.
Alors, pour tout $x \in E$, la distance $\boldsymbol{d(x,F)}$ **est atteinte en un seul point** *: le projeté orthogonal $p_F(x)$.*
En d'autres termes :

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F, \quad \|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|,$$

avec égalité si et seulement si $y = p_F(x)$.

Preuve
Cela résulte du théorème de Pythagore (faire un dessin).
Si $x \in E$ et $y \in F$, alors les vecteurs $p_F(x) - y \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$ sont orthogonaux, donc

$$\|x-y\|^2 = \|(p_F(x) - y) + (x - p_F(x))\|^2 = \|p_F(x) - y\|^2 + \|x - p_F(x)\|^2.$$

Tous les termes étant positifs, on a

$$\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|,$$

ce qui montre que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$. Et d'autre part :

$$d(x,F) = \|x - y\| \iff \|p_F(x) - y\|^2 = 0 \iff y = p_F(x).$$

<u>**ATTENTION !**</u>
Dans ce contexte préhilbertien, on a donc

$$d(x, F) = 0 \iff x = p_F(x) \iff x \in F.$$

Mais si E est un espace vectoriel normé quelconque et A une partie non vide de E, alors l'équivalence $(d(x,A) = 0 \iff x \in A)$ n'est plus vraie, on a seulement $(x \in A \implies d(x,A) = 0)$.
On montrera (cf. chapitre de topologie) que dans le cadre général des espaces vectoriels normés :

$$d(x, A) = 0 \iff x \text{ est limite d'une suite de points de } A.$$

Corollaire 10 (Autre formule de la distance)
Avec les notations précédentes, on a aussi

$$d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2.$$

Preuve
On vient de montrer que $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$. Les vecteurs $p_F(x) \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$ sont orthogonaux, donc par le théorème de Pythagore :

$$\|x\|^2 = \|p_F(x) + (x - p_F(x))\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x,F)^2.$$

Exemple
Dans l'exemple précédent $\boxed{E = \mathbb{R}^3 \text{ et } F = Vect\left((1,1,0),(0,1,1)\right)}$*, calculons la distance* $d(v,F)$.

Pour tout $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a $p_F(v) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x+y-z \\ x+2y+z \\ -x+y+2z \end{pmatrix}$, donc

$$d(v,F) = \|v - p_F(v)\| = \frac{1}{3}\left\|\begin{pmatrix} x-y+z \\ -x+y-z \\ x-y+z \end{pmatrix}\right\| = \frac{|x-y+z|}{\sqrt{3}}.$$

Remarque
Dans cet exemple, une équation cartésienne du plan F est $x - y + z = 0$, car les points $v = (x,y,z)$ qui appartiennent à F sont ceux qui annulent la distance $d(v,F)$.

5) Inégalité de Bessel

Propriété 11 (Inégalité de Bessel)
Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une famille orthonormée de E. Alors

$$\forall x \in E, \qquad \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 \leq \|x\|^2.$$

Preuve
Appliquer Pythagore et utiliser le fait qu'une projection orthogonale réduit la norme.

Remarque
Si E est de dimension finie (espace euclidien) et si $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base orthonormée de E, alors on a :

$$\forall x \in E, \qquad \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2 = \|x\|^2.$$

Corollaire 12 (Inégalité de Bessel pour une suite orthonormée)
Si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormée de E, alors pour tout $x \in E$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} (x|e_k)^2$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x|e_k)^2 \leq \|x\|^2.$$

Remarque
Vu qu'une famille orthonormée est libre, l'existence d'une suite orthonormée (donc une famille orthonormée dénombrable) implique que E est de dimension infinie.

Preuve

D'après la proposition précédente, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_{k\geq 0}(x|e_k)^2$ sont majorées par $\|x\|^2$.

Dans la suite du chapitre, E désigne un espace euclidien (c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie), non réduit à $\{0_E\}$.

II Isométries vectorielles d'un espace euclidien

1) Définition et premières propriétés

Définition 13 (Isométrie vectorielle)
Une **isométrie vectorielle** *de E est un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ qui conserve la norme, c'est-à-dire $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$.*

Propriété 14 (Equivalence avec la conservation du produit scalaire)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a l'équivalence :

$$u \text{ est une isométrie vectorielle} \iff \forall (x;y) \in E^2, \quad (u(x)|u(y)) = (x|y).$$

Preuve (dans la banque d'exercices INP)

- $\boxed{\Longleftarrow}$ C'est évident car si u conserve le produit scalaire, alors en utilisant la propriété $\forall (x;y) \in E^2,\ (u(x)|u(y)) = (x|y)$ avec $x = y$, on obtient
$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = (u(x)|u(x))^{1/2} = (x|x)^{1/2} = \|x\|.$$
- $\boxed{\Longrightarrow}$ Réciproquement, si on a $\forall x \in E,\ \|u(x)\| = \|x\|$, alors on en déduit par une identité de polarisation et la linéarité de u que pour tout $(x,y) \in E^2$:
$$\begin{aligned}(u(x)|u(y)) &= \tfrac{1}{4}\left(\|u(x)+u(y)\|^2 - \|u(x)-u(y)\|^2\right)\\ &= \tfrac{1}{4}\left(\|u(x+y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right).\end{aligned}$$
Puisque u conserve la norme, on a alors
$$(u(x)|u(y)) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = (x|y).$$

<u>ATTENTION !</u>
L'équivalence est **fausse si on ne suppose pas u linéaire !**
Une application non-linéaire $u : E \to E$ peut très bien conserver la norme sans conserver le produit scalaire.
Par exemple, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

En effet :

- f est non linéaire car $f(-1,0) = f(1,0) = (1,0)$, donc en notant $\overrightarrow{i} = (1,0)$, on a $f(-\overrightarrow{i}) \neq -f(\overrightarrow{i})$.
- f conserve la norme car pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:
$$\|f(x,y)\| = \left\|\begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|.$$
- f ne conserve pas le produit scalaire canonique car, en notant $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base canonique :
$$(\overrightarrow{i}|\overrightarrow{j}) = 0, \qquad (f(\overrightarrow{i})|f(\overrightarrow{j})) = (\overrightarrow{i}|\overrightarrow{i}) = 1.$$

Vocabulaire
Les isométries vectorielles sont parfois appelées **endomorphismes orthogonaux**, car elles conservent l'orthogonalité :

$$x \perp y \iff (x|y) = 0 \iff (u(x)|u(y)) = 0 \iff u(x) \perp u(y).$$

On parle même **d'automorphismes orthogonaux**, puisque les isométries sont bijectives (voir prop. suivante).

Notation
On notera $\boldsymbol{\mathcal{O}(E)}$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Propriété 15 (Structure de groupe de $\mathcal{O}(E)$)
L'ensemble $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$, donc un groupe.
On appelle $\mathcal{O}(E)$ le **groupe orthogonal** *de E.*

Preuve (dans la banque d'exercices INP)

- $\mathcal{O}(E) \subset GL(E)$: si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors u est linéaire et la conservation de la norme entraîne $Ker(u) = \{0_E\}$, car

$$x \in Ker(u) \iff u(x) = 0_E \iff \|u(x)\| = 0 \iff \|x\| = 0 \iff x = 0_E.$$

  Donc u est injectif. C'est un endomorphisme en dimension finie, donc u est bijectif.
- Pour tout $x \in E$, $\|Id_E(x)\| = \|x\|$, donc $Id_E \in \mathcal{O}(E)$.
- Si $u, v \in \mathcal{O}(E)$, alors u et v conservent la norme, donc pour tout $x \in E$:

$$\|(u \circ v)(x)\| = \|u(v(x))\| = \|v(x)\| = \|x\|,$$

  ce qui montre que $u \circ v \in \mathcal{O}(E)$.
- Si $u \in \mathcal{O}(E)$, fixons $y \in E$, et notons $x = u^{-1}(y)$ son unique antécédent :

$$\|u^{-1}(y)\| = \|x\| = \|u(x)\| = \|y\|,$$

  donc $u^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

Remarque
L'inclusion $\mathcal{O}(E) \subset GL(E)$ est stricte (il existe des automorphismes qui ne conservent pas la norme).

ATTENTION !
Le groupe $\boldsymbol{\mathcal{O}(E)}$ **n'est pas commutatif en général** ($u \circ v \neq v \circ u$).

2) Conservation des bases orthonormées

Propriété 16 (Conservation des bases orthonormées)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors, les assertions suivantes sont **équivalentes** *:*

(i) $u \in \mathcal{O}(E)$;

(ii) Pour toute base **orthonormée** $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *de E, la famille image $(u(e_i))_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de E ;*

(iii) Il existe une base **orthonormée** $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ *de E telle que la famille image $(u(e_i))_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de E.*

Preuve (dans la banque d'exercices INP)

$\boxed{(i) \implies (ii)}$ Supposons que $u \in \mathcal{O}(E)$ et considérons $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base orthonormée de E. Montrons que la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est aussi une base orthonormée de E. Déjà, u étant bijective, $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est une base de E (c'est l'image d'une base). Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Puisque u est une isométrie vectorielle , elle conserve le produit scalaire et donc

$$(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$$

(puisque la famille $(e_1, \cdots, e_n)$ est orthonormée).
Ceci montre bien que la base $(u(e_1), \cdots, u(e_n))$ est orthonormée.

$\boxed{(ii) \implies (iii)}$ Evident car tout espace euclidien E possède au moins une base orthonormée.

$\boxed{(iii) \implies (i)}$ Supposons qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$ de E dont l'image est aussi une base orthonormée de E. Montrons alors que u conserve la norme. Pour $x \in E$, nous avons

$$x = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k,$$

donc par linéarité :

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)u(e_k).$$

Puisque la base $(u(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est orthonormée, on a $\|u(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$.

Mais on a aussi $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x|e_k)^2$ car $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base orthonormée de E, donc $\|u(x)\|^2 = \|x\|^2$, ce qui montre que $u \in \mathcal{O}(E)$.

Remarque
Les isométries vectorielles sont donc exactement les endomorphismes qui conservent les bases orthonormées (tout comme les automorphismes sont exactement les endomorphismes qui conservent les bases).

III Matrices orthogonales

Dans la suite, n désigne un entier naturel non nul.

1) Définition et propriétés

Propriété 17 (Représentation d'une isométrie vectorielle dans une b.o.n)
Soit $u \in \mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base **orthonormée** *de E.*
On note $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Alors $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^\top$.

ATTENTION !
Ce résultat est **faux** si on représente f dans une **base quelconque**.

Preuve

- A est inversible car u est bijective.
- Les colonnes de A sont les coordonnées des $u(e_j)$ dans la base orthonormée $(e_1, \cdots, e_n)$, donc on a
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad A[i,j] = (u(e_j)|e_i)$$
(d'après l'expression des coordonnées dans une base orthonormée).
- De même, les colonnes de A^{-1} sont les coordonnées des $u^{-1}(e_j)$ dans $(e_1, \cdots, e_n)$, donc
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad A^{-1}[i,j] = (u^{-1}(e_j)|e_i).$$
Puisque u conserve le produit scalaire, on en déduit :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad A^{-1}[i,j] = (u(u^{-1}(e_j))|u(e_i)) = (e_j|u(e_i)) = (u(e_i)|e_j) = A[j,i],$$
ce qui montre bien que $A^{-1} = A^\top$.

Ceci amène la définition suivante :

Définition 18 (Matrice orthogonale)
Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite **orthogonale** *lorsque $A^\top \times A = I_n$.*

Remarque
A est orthogonale $\iff A \times A^\top = I_n \iff A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^\top$.

Notation
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on notera $\boldsymbol{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$ (ou encore $\boldsymbol{\mathcal{O}(n)}$) l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété 19 (Structure de groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$)
L'ensemble $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$, donc un groupe.
On appelle $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ le **groupe orthogonal matriciel d'ordre $\boldsymbol{n}$**.

Preuve

- On a déjà prouvé l'inclusion $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$.
- $I_n \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ car $I_n^\top I_n = I_n^2 = I_n$.
- Si $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors
$$(AB)^\top AB = (B^\top A^\top)(AB) = B^\top \underbrace{(A^\top A)}_{=I_n} B = B^\top B = I_n,$$
donc $AB \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

- Si $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, alors A est inversible et $A^{-1} = A^\top$, donc

$$(A^{-1})^\top A^{-1} = (A^\top)^\top A^\top = A \times A^\top = I_n,$$

ce qui montre que $A^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

ATTENTION !
Le groupe $\boldsymbol{\mathcal{O}_n(\mathbb{R})}$ **n'est pas commutatif en général**.

Propriété 20 (Correspondance $\mathcal{O}(E)/\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** *de E. Alors on a*

$$u \in \mathcal{O}(E) \iff Mat_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

Preuve

$\boxed{\Longrightarrow}$ Déjà montré, c'est l'énoncé de la proposition 17.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$. Par hypothèse, on a $A \times A^\top = I_n$. Montrons que u conserve la norme. Soit $x \in E$, notons $X = [x]_{\mathcal{B}}$ (le vecteur colonne formé des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$). Puisque $\mathcal{B}$ est orthonormée, on a $\|x\|^2 = X^\top X$.
En outre, $[u(x)]_{\mathcal{B}} = Mat_{\mathcal{B}}(u) \times [x]_{\mathcal{B}} = AX$, donc

$$\|u(x)\|^2 = (AX)^\top (AX) = X^\top \underbrace{(A^\top A)}_{=I_n} X = X^\top X = \|x\|^2,$$

ce qui montre que $u \in \mathcal{O}(E)$.

Remarque
Si $\mathcal{B}$ est une base de E, alors l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres :

$$\Phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & Mat_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$$

induit par restriction un isomorphismes de groupes entre les groupes d'éléments inversibles :

$$(GL(E), \circ) \longrightarrow (GL_n(\mathbb{R}), \times).$$

Si de plus la base $\mathcal{B}$ est **orthonormée**, *alors cet isomorphisme de groupes en induit un deuxième entre les groupes orthogonaux :*

$$(\mathcal{O}(E), \circ) \longrightarrow (\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times),$$

d'après la proposition précédente.

Remarque
Bien entendu, une matrice A est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme $u : X \mapsto AX \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A est orthogonal (parce que la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour le produit scalaire euclidien).

On donne ici une caractérisation des matrices orthogonales à partir d'une propriété géométrique sur les colonnes.

Propriété 21 (Diverses caractérisations des matrices orthogonales)
Les assertions suivantes sont **équivalentes** *:*

(i) $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;

(ii) les colonnes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire canonique) ;

(iii) $A^\top \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$;

(iv) les lignes de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

ATTENTION !
Base ortho**normée**, pas orthogonale !

Preuve
Remarquons que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (A^\top\, A)[i,j] = \sum_{k=1}^{n} A[k,i]A[k,j] = (C_i|C_j),$$

où $(C_1, \cdots, C_n)$ désignent les colonnes de la matrice carrée A et $(.|.)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. On a donc

$$\begin{aligned}(i) \quad &\iff \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (A^\top\, A)[i,j] = \delta_{i,j} \\ &\iff \quad \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad (C_i|C_j) = \delta_{i,j} \iff (C_1, \cdots, C_n) \text{ orthonormée.} \\ &\iff \quad (ii)\end{aligned}$$

Puisque $A^\top \times A = I_n \iff A \times A^\top = I_n$, on en déduit que $(i) \iff (iii)$.
Enfin, les colonnes de $A^\top$ sont les lignes de A, donc d'après l'équivalence $(i) \iff (ii)$:

$$(iii) \iff \text{ les colonnes de } A^\top \text{ forment une base orthonormée } \iff (iv).$$

Propriété 22 (Changement de bases orthonormées)
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E et soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

$$\mathcal{B}' \textit{ est une base orthonormée de } E \iff P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

Dans ce cas, on a de plus $Mat_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = P^\top$.

Preuve
On connaît déjà la propriété suivante : si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ une famille de vecteurs de E, alors

$$\mathcal{B}' \text{ est une base de } E \iff P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in GL_n(\mathbb{R}).$$

En outre, puisque la base $\mathcal{B}$ est orthonormée et puisque les colonnes de P sont les coordonnées des e'_j dans la base $\mathcal{B}$, on a :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \qquad (e'_i|e'_j)_E = (C_i(P)|C_j(P))_{\mathbb{R}^n}$$

(le produit scalaire des **vecteurs** est égal au produit scalaire canonique des **coordonnées**), donc la famille $\mathcal{B}'$ est orthonormée si et seulement si la famille des colonnes de P est orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$, ce qui montre l'équivalence voulue.

Remarque
Ainsi, si on fixe un espace euclidien E quelconque de dimension n, alors une matrice orthogonale $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ peut être vue :

- *soit comme la matrice d'une isométrie vectorielle $u \in \mathcal{O}(E)$* **dans une base orthonormée pour le produit scalaire de E**.
- *soit comme la matrice de passage* **d'une base orthonormée de E à une autre**.

Corollaire 23 (Changement de bases orthonormées pour les endomorphismes)
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E.
Alors, en notant $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$, $A' = Mat_{\mathcal{B}'}(u)$ et $P = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$, on a $A' = P^\top AP$.

Preuve
Cela résulte de la formule de changement de base connue $A' = P^{-1}AP$, et du fait que $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ d'après la proposition précédente.

Vocabulaire
On dira que deux matrices $A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont **orthogonalement semblables** lorsqu'il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tel que $A' = P^{-1}AP = P^\top AP$, ce qui implique évidemment qu'elles sont semblables.

2) Caractérisation des symétries orthogonales

Propriété 24 (Les symétries orthogonales sont des isométries)
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors, la symétrie orthogonale par rapport à F, notée σ_F, appartient à $\mathcal{O}(E)$.

Preuve
Montrons que l'endomorphisme σ_F conserve la norme.
Soit $x = x_1 + x_2 \in E = F \oplus F^\perp$. On a $\sigma_F(x) = x_1 - x_2$, donc

$$\|\sigma_F(x)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = \|x_1 + x_2\|^2 = \|x\|^2,$$

d'après le théorème de Pythagore, qui s'applique puisque $x_1 \perp x_2$ et $x_1 \perp -x_2$.
Finalement, on a bien $\|\sigma_F(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$, donc $\sigma_F \in \mathcal{O}(E)$.

ATTENTION !
Une projection orthogonale p_F n'est jamais dans $\mathcal{O}(E)$, et même pas dans $GL(E)$ sauf si $F = E$ (le seul projecteur bijectif est l'identité).

Propriété 25 (Caractérisation des symétries orthogonales)
Soit E un espace euclidien, soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** *de E.*
On note $A = Mat_\mathcal{B}(u)$. Alors :

$$u \text{ est une symétrie orthogonale} \iff A \text{ est orthogonale et symétrique.}$$

Preuve
La base $\mathcal{B}$ est orthonormée, donc on a déjà $u \in \mathcal{O}(E) \iff A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.
Montrons l'équivalence voulue.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si u est une symétrie orthogonale, on a $u \in \mathcal{O}(E)$ donc $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $A^\top = A^{-1}$. En outre, $u \circ u = Id_E$, donc $A^2 = I_n$, et donc $A^\top = A^{-1} = A$, ce qui montre que A est symétrique.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si A est orthogonale et symétrique, on a $A^\top = A^{-1}$ et $A^\top = A$, donc $A^{-1} = A$, c'est-à-dire $A^2 = I_n$. Ceci montre que $u \circ u = Id_E$, et donc u est une symétrie, ce qui implique notamment $E = Ker(u - Id_E) \oplus Ker(u + Id_E)$.
Montrons ensuite que $Ker(u - Id_E) \perp Ker(u + Id_E)$. Soit $x_1 \in Ker(u - Id_E)$ et $x_2 \in Ker(u + Id_E)$. On a $u(x_1) = x_1$ et $u(x_2) = -x_2$, donc puisque u conserve le produit scalaire :

$$(x_1|x_2) = (u(x_1)|u(x_2)) = (x_1|-x_2) = -(x_1|x_2),$$

et donc $(x_1|x_2) = 0$. Finalement, u est bien une symétrie orthogonale.

IV Signe d'une isométrie vectorielle

E désigne toujours un espace euclidien non nul et n un entier naturel non nul.

1) Isométries positives / négatives

Propriété 26 (Déterminant d'une isométrie vectorielle / d'une matrice orthogonale)

(*i*) *Si* $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$*, alors* $\det(A) = \pm 1$.

(*ii*) *Si* $u \in \mathcal{O}(E)$*, alors* $\det(u) = \pm 1$.

Preuve

(*i*) Puisque $A^\top \times A = I_n$, on en déduit par multiplicativité du déterminant :

$$\det(A^\top) \times \det(A) = \det(I_n) = 1,$$

c'est-à-dire $\det(A)^2 = 1$ (puisque $\det(A^\top) = \det(A)$), d'où le résultat.

(*ii*) Fixons $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et posons $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$.
Puisque $u \in \mathcal{O}(E)$, on a $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, donc $\det(u) = \det(A) = \pm 1$.

ATTENTION !
La valeur du déterminant n'est pas une caractérisation des isométries !

$$\mathcal{O}(E) \subsetneq \{u \in \mathcal{L}(E),\ \det(u) = \pm 1\}.$$

En effet, il ne suffit pas qu'un endomorphisme soit de déterminant ± 1 pour qu'il conserve la norme.

Définition 27 (Isométries vectorielles positives/négatives)
Soit $u \in \mathcal{O}(E)$*. On dit que*

(*i*) *u est une* **isométrie positive** *(ou "directe") si* $\det(u) = 1$,

(*ii*) *u est une* **isométrie négative** *(ou "indirecte") si* $\det(u) = -1$.

Notation
On notera $\mathcal{SO}(E)$ (ou $\mathcal{O}^+(E)$) l'ensemble des isométries vectorielles positives de E, et $\mathcal{O}^-(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles négatives de E.
Formellement :

$$\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E),\ \det(u) = 1\}.$$

Propriété 28 (Structure de groupe de $\mathcal{SO}(E)$)
L'ensemble $\mathcal{SO}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$, donc un groupe.
On l'appelle **groupe spécial orthogonal** *de E.*

Preuve
On peut le montrer à la main :

- $Id_E \in \mathcal{O}(E)$ et $\det(Id_E) = 1$, donc $Id_E \in \mathcal{SO}(E)$.
- Si $u, v \in \mathcal{SO}(E)$, alors $u \circ v \in \mathcal{O}(E)$ (car $u, v \in \mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{O}(E)$ est stable par composition). De plus, $\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v) = 1 \times 1 = 1$, donc $u \circ v \in \mathcal{SO}(E)$.
- Si $u \in \mathcal{SO}(E)$, alors $u \in \mathcal{O}(E)$, donc $u^{-1} \in \mathcal{O}(E)$ (déjà montré). De plus, $\det(u^{-1}) = \frac{1}{\det(u)} = \frac{1}{1} = 1$, ce qui montre que $u^{-1} \in \mathcal{SO}(E)$.

Ou alors on dit que $\mathcal{SO}(E)$ est le noyau du morphisme de groupes $\det : (\mathcal{O}(E), \circ) \to (\{-1, 1\}, \times)$, c'est plus rapide.

Remarque

- *La multiplicativité du déterminant donne :*

$$(u, v) \in \mathcal{O}^-(E)^2 \implies u \circ v \in \mathcal{SO}(E).$$

- *L'ensemble $\mathcal{O}^-(E)$ des isométries vectorielles négatives* **n'est pas** *un groupe (il n'est pas stable par $\circ$ et il ne contient même pas Id_E).*

Définition 29 (Groupe spécial orthogonal matriciel)
On définit

$$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \det(A) = 1\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^\top \times A = I_n,\ \det(A) = 1\}.$$

(on le note aussi $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{SO}(n)$). On définit également

$$\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}),\ \det(A) = -1\} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A^\top \times A = I_n,\ \det(A) = -1\}.$$

Propriété 30 (Structure de groupe de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$)
L'ensemble $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times)$, donc un groupe.

Preuve
$\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est le noyau du morphisme de groupes det : $(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \times) \to (\{-1, 1\}, \times)$.

Propriété 31 (Correspondance $\mathcal{SO}(E)$ / $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$)
Soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** *de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$u \in \mathcal{SO}(E) \iff Mat_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}).$$

Preuve
A base orthonormée fixée, on sait déjà que $\mathcal{O}(E)$ correspond à $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Vu que $\det(u) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(u))$ (par définition du déterminant d'un endomorphisme), on en déduit le résultat.

2) Action sur l'orientation des bases

On rappelle que dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, on a, pour toute base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et toute famille de vecteurs $\mathcal{F} = (x_1, \cdots, x_n)$:

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0.$$

Définition 32 (Orientation d'un espace vectoriel réel)
Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dit **orienté** *lorsqu'on choisit une base $\mathcal{B}_0$ de référence.*
Dans ce cas, on appelle :

- *bases* **directes** *les bases $\mathcal{B}$ telles que $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) > 0$;*
- *bases* **indirectes** *les bases $\mathcal{B}$ telles que $\det_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) < 0$.*

On dit que deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont **même orientation** *lorsque $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$.*

Remarque
On montre facilement que la relation définie par

$$\mathcal{B} \sim \mathcal{B}' \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0$$

est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E, grâce aux relations suivantes :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1, \quad \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \frac{1}{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')}, \quad \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}'').$$

Ainsi, il y a deux classes d'équivalence : celle de $\mathcal{B}_0$ (les bases directes), et l'autre (les bases indirectes).

Propriété 33 (Isométries positives et orientation)
Soit E un espace euclidien orienté et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

(*i*) *Si $u \in \mathcal{SO}(E)$, alors u préserve les bases orthonormées directes et indirectes de E (c'est-à-dire que pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E de même orientation que $\mathcal{B}$)*

(*ii*) *Réciproquement, s'il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $u(\mathcal{B})$ soit une base orthonormée de E de même orientation que $\mathcal{B}$, alors $u \in \mathcal{SO}(E)$.*

Remarque

- *Parmi les isométries vectorielles, les isométries positives sont celles qui "conservent l'orientation", c'est pourquoi on les appelle parfois "isométries directes".*
- *Conséquence immédiate : toute matrice de passage entre deux bases orthonormées de E* **de même orientation** *est une matrice de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.*

Preuve

(*i*) Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, alors la famille image $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E (car $u \in \mathcal{O}(E)$), et cette base image a la même orientation que $\mathcal{B}$, puisque

$$\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = \det(Mat_{\mathcal{B}}(u)) = \det(u) = 1 > 0.$$

(*ii*) Puisque u transforme la base orthonormée $\mathcal{B}$ en base orthonormée $u(\mathcal{B})$, on a $u \in \mathcal{O}(E)$, donc $\det(u) = \pm 1$. De plus,

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) > 0,$$

car la base $u(\mathcal{B})$ a même orientation que $\mathcal{B}$. Donc $\det(u) = 1$, et $u \in \mathcal{SO}(E)$.

Corollaire 34 (Indépendance du déterminant vis-à-vis des b.o.n.d)
Soit E un espace euclidien orienté de dimension n.
Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ une famille de vecteurs de E. Alors, le nombre $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$ ne dépend pas de la base orthonormée **directe** *de E choisie.*

Preuve
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Alors, pour toute famille de vecteurs $(x_1, \cdots, x_n) \in E^n$, on a

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \cdots, x_n) = \det_{\mathcal{B}'}(x_1, \cdots, x_n),$$

car $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$, vu que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice de $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ (en effet, les bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont même orientation).

V Groupe orthogonal en dimension 2

Remarque (Situation triviale en dimension 1)
Si $\mathcal{D}$ est un espace euclidien de dimension 1 (une droite munie d'un produit scalaire), alors

$$\mathcal{O}(\mathcal{D}) = \{Id_{\mathcal{D}}; -Id_{\mathcal{D}}\}.$$

En effet, les endomorphismes de $\mathcal{D}$ sont des homothéties (λId_E avec $\lambda \in \mathbb{R}$), donc les seuls conservant la norme correspondent à $\lambda = \pm 1$.

Etudions maintenant ce qui se passe **en dimension** 2, dans un **plan euclidien** E.

1) Description de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$

La connaissance du groupe orthogonal matriciel $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ suffit à connaître $\mathcal{O}(E)$.

Propriété 35 (Description de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$)

(i) Les matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

(ii) Les matrices de $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$.

Preuve
Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est orthogonale si et seulement si : $\begin{cases} ac + bd = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \end{cases}$.
On sait que

$$a^2 + b^2 = 1 \iff \exists \alpha \in \mathbb{R}, \begin{cases} a = \cos\alpha \\ b = \sin\alpha \end{cases},$$

$$c^2 + d^2 = 1 \iff \exists \beta \in \mathbb{R}, \begin{cases} c = \sin\beta \\ d = \cos\beta \end{cases}$$

Ces conditions étant vérifiées, on a donc

$$ac + bd = 0 \iff \cos\alpha \sin\beta + \sin\alpha \cos\beta = 0 \iff \sin(\alpha + \beta) = 0,$$

c'est-à-dire

$$ac + bd = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \alpha + \beta = k\pi \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \beta = k\pi - \alpha.$$

Puisque $\begin{cases} \cos(k\pi - \alpha) = (-1)^k \cos\alpha \\ \sin(k\pi - \alpha) = (-1)^{k+1} \sin\alpha \end{cases}$, on en déduit que

$$A \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ \exists k \in \mathbb{Z}, \quad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & (-1)^{k+1} \sin\alpha \\ \sin\alpha & (-1)^k \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Le déterminant vaut alors $\det(A) = (-1)^k \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = (-1)^k$.
Donc les matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ correspondent au cas où $(-1)^k = 1$, et celles de $\mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$ au cas où $(-1)^k = -1$:

$$A \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

$$A \in \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R}) \iff \exists \alpha \in \mathbb{R},\ A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

On en déduit le résultat annoncé.

Définition 36 (Matrices de rotation)
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on notera $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$.
On l'appelle **matrice de rotation d'angle** θ *(le réel θ est unique à 2π près).*

Remarque
On a alors $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{O}_2^+(\mathbb{R}) = \{R_\theta,\ \theta \in \mathbb{R}\} = \{R_\theta,\ \theta \in]-\pi, \pi]\}$.
(i.e. les matrices orthogonales positives sont exactement les matrices de rotation).

Propriété 37 (Le groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif)
Pour tous $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, *on a* $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} \times R_\theta$.
En particulier, le groupe $(\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times)$ *est commutatif, et l'application*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes surjectif, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Preuve (non traitée en classe)
Simple vérification :

$$R_\theta \times R_{\theta'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta' & -\sin\theta' \\ \sin\theta' & \cos\theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta+\theta') & -\sin(\theta+\theta') \\ \sin(\theta+\theta') & \cos(\theta+\theta') \end{pmatrix} = R_{\theta+\theta'}.$$

Or, $R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'+\theta}$, donc $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta'} \times R_\theta$.
Cette formule montre bien que φ est un morphisme de groupes commutatifs, il est surjectif car $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ n'est formé que de matrices de rotation, et on a

$$\theta \in Ker(\varphi) \iff R_\theta = I_2 \iff \cos(\theta) = 1 \text{ et } \sin(\theta) = 0 \iff \theta \equiv 0\ [2\pi].$$

ATTENTION !
Le groupe $\boldsymbol{\mathcal{O}_2}(\mathbb{R})$ **n'est pas commutatif**. Par exemple, en posant
$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A, B \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R})$, mais $AB \neq BA$.

Remarque (HP)
Si on munit $\mathbb{R}$ de la relation d'équivalence :

$$\theta \sim \theta' \iff \theta \equiv \theta'\ [2\pi],$$

et si note $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ l'ensemble des classes d'équivalence $\overline{\theta}$ pour cette relation (appelé "ensemble quotient"), alors le morphisme de groupes surjectif

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{array} \right.$$

"passe au quotient", c'est-à-dire que l'application

$$\overline{\varphi} : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +) & \longrightarrow & (\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times) \\ \overline{\theta} & \longmapsto & R_\theta \end{array} \right.$$

est bien définie, et il se trouve que c'est un isomorphisme de groupes.
En effet $\overline{\varphi}$ est un morphisme de groupes, on a $Im(\overline{\varphi}) = Im(\varphi) = \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, *ainsi que*

$$Ker(\overline{\varphi}) = \{\overline{\theta},\ \theta \in Ker(\varphi) = 2\pi\mathbb{Z}\} = \{\overline{0}\}.$$

Remarque
On a aussi un isomorphisme de groupes multiplicatifs :

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{U}, \times) & \longrightarrow & (\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times) \\ z & \longmapsto & \begin{pmatrix} Re(z) & -Im(z) \\ Im(z) & Re(z) \end{pmatrix} \end{array} \right. ,$$

où on rappelle que $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.
L'isomorphisme réciproque est donné par

$$\psi^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}), \times) & \longrightarrow & (\mathbb{U}, \times) \\ R_\theta & \longmapsto & e^{i\theta} \end{array} \right. .$$

2) Description de $\mathcal{SO}(E)$

Propriété 38 (Invariance de la matrice de $u \in \mathcal{SO}(E)$ dans une b.o.n.d)
Soit E un espace euclidien de dimension 2 **orienté***, et soit $u \in \mathcal{SO}(E)$.*
Alors, il existe un unique réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que **pour toute base orthonormée directe** *$\mathcal{B}$ de E, $Mat_{\mathcal{B}}(u) = R_\theta$.*

Remarque
La matrice de $u \in \mathcal{SO}(E)$ est donc **indépendante** *de la base orthonormée directe choisie.*

Preuve
Notons $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées directes de E, et A_1, A_2 les matrices respectives de u dans ces bases. Les matrices A_1 et A_2 sont semblables. Puisque $u \in \mathcal{SO}(E)$ et que $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ sont orthonormées, on a $A_1, A_2 \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$. De plus, la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ est aussi dans $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ (car les deux bases en question sont orthonormées et de même orientation), donc $P^{-1} \in \mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ et

$$A_2 = P^{-1}A_1P = A_1P^{-1}P = A_1,$$

puisque le groupe $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

ATTENTION !
La matrice de u change si on l'écrit dans une base orthonormée indirecte.

La proposition précédente donne un sens à la définition suivante :

Définition 39 (Rotation plane d'angle θ)
Soit E un espace euclidien de dimension 2 **orienté***. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, la* **rotation vectorielle d'angle** *θ, notée r_θ, est l'unique endomorphisme de E dont la matrice dans* **toute** *base orthonormée* **directe** *est R_θ.*

Dessin (Rotation vectorielle)

Corollaire 40 (Nature des isométries positives en dimension 2)
Si E est un espace euclidien de dimension 2, alors les éléments de $\mathcal{SO}(E)$ sont exactement les rotations vectorielles.

Preuve
Orientons E en fixant une base orthonormée $\mathcal{B}$ (directe, de fait). Les éléments de $\mathcal{SO}(E)$ sont tous représentés dans $\mathcal{B}$ par des matrices de $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$, donc du type R_θ. Ce sont donc des rotations vectorielles. Réciproquement, toute rotation vectorielle de E est par définition dans $\mathcal{SO}(E)$.

Remarque
On a, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $r_0 = r_{2k\pi} = Id_E$ et $r_\pi = r_{(2k+1)\pi} = -Id_E$.

3) Description de $\mathcal{O}^-(E)$

On va maintenant étudier les $u \in \mathcal{O}(E)$ tels que $\det(u) = -1$.

Propriété 41 (Nature des isométries négatives en dimension 2)
Si E est un espace euclidien de dimension 2, alors les éléments de $\mathcal{O}^-(E)$ sont exactement les symétries orthogonales **par rapport à une droite***. Ce sont donc les réflexions du plan E.*

Preuve

- Soit $u \in \mathcal{O}^-(E)$ avec $\dim(E) = 2$. On fixe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E. On a alors $Mat_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_2^-(\mathbb{R})$, donc il existe un réel φ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$. Cette matrice **à la fois orthogonale et symétrique**. On en déduit d'après la prop. 25 que u est une symétrie orthogonale. Pour montrer que u est une réflexion, il reste à montrer que l'ensemble $F = Ker(u - Id_E)$ est une droite vectorielle.
  On utilise la décomposition $E = Ker(u - Id_E) \oplus Ker(u + Id_E)$ (vraie pour toute symétrie).
  Si $\dim(Ker(u-Id_E)) = 0$, on a $E = Ker(u+Id_E)$, donc $u = -Id_E$, qui est dans $\mathcal{SO}(E)$ (puisque $\det(-Id_E) = (-1)^2 = 1$), donc il y a contradiction.
  Si $\dim(Ker(u - Id_E)) = 2$, on a (de même), $u = Id_E$, qui donne aussi une contradiction.
  Donc $\dim(Ker(u - Id_E)) = 1$, et u est bien une réflexion.
- Réciproquement, les réflexions du plan E sont bien des éléments de $\mathcal{O}^-(E)$ puisque ce sont des isométries vectorielles, et que leur déterminant vaut -1 (elles se représentent par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans une base adaptée à la somme directe).

ATTENTION !
$-Id_E$ est à la fois une symétrie orthogonale (par rapport au sev $\{0_E\}$) et une rotation (d'angle π), mais **pas une réflexion** car elle est dans $\mathcal{SO}(E)$.

4) Classification des isométries en dimension 2

Théorème 42 (Classification des isométries en dimension 2)
Soit E un espace euclidien de dimension 2 et soit $u \in \mathcal{O}(E)$.
On dispose de la classification suivante :

$\det(u)$	*Forme réduite dans une b.o.n.d adaptée*	*Nature géométrique de u*
1	$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ *avec* $\theta \neq 0\ [\pi]$	*Rotation vectorielle d'angle* $\theta \neq 0\ [\pi]$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Id_E
1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$-Id_E$
-1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	*Réflexion par rapport à la droite* $Ker(u - Id_E)$

On dispose aussi de la classification suivante, suivant la dimension des invariants :

$\dim(Ker(u - Id_E))$	*Nature géométrique de u*	$\det(u)$
0	*Rotation vectorielle différente de* Id_E	1
1	*Réflexion par rapport à la droite* $Ker(u - Id_E)$	-1
2	Id_E	1

Preuve
Découle de ce qui précède.