CH05 : Espaces vectoriels normés - Généralités

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I Normes et espaces vectoriels normés

1) Normes

Définition 1 (Norme)
Une **norme** *sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \implies x = 0_E$ *(séparation) ;*

(ii) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *(homogénéité) ;*

(iii) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire).*

Notation
En général, une norme se notera $\| \,.\, \|$ plutôt que N.

Propriété 2 (Inégalité triangulaire renversée)
Si $\| \,.\, \|$ est une norme sur E, alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|.$$

Définition 3 (Espace vectoriel normé)
Un **espace vectoriel normé** *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une norme $\| \,.\, \|$.*

Notation
Souvent, un espace vectoriel normé se note par un couple $(E, \| \,.\|)$, où $\| \,.\|$ est la norme choisie sur l'espace vectoriel E.

Dans la suite, on fixe un espace vectoriel normé $(E, \| \,.\|)$.

Définition 4 (Vecteur unitaire)
Un vecteur $x \in E$ est dit **unitaire** *lorsque $\|x\| = 1$.*

2) Distances, boules

Définition 5 (Distance associée à une norme)
On appelle **distance associée à la norme** $\| \,.\, \|$ *l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad d(x, y) = \|y - x\|.$$

Propriété 6 (Propriétés de la distance)
L'application distance $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ possède les propriétés suivantes :

(i) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = 0 \iff x = y$ *(séparation) ;*

(ii) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(y, x) = d(x, y)$ *(symétrie) ;*

(iii) $\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 7 (Distance d'un point à une partie)
Etant donné un point $x \in E$ et une partie non vide $A \subset E$, on appelle **distance de x à A** *le réel positif :*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Définition 8 (Boule fermée, boule ouverte, sphère)
Soit $a \in E$ et soit un réel $r > 0$.
On appelle **boule ouverte de centre a et de rayon r** *l'ensemble*

$$B(a,r) = \{x \in E,\ d(a,x) < r\}.$$

On appelle **boule fermée de centre a et de rayon r** *l'ensemble*

$$B_f(a,r) = \{x \in E,\ d(a,x) \leq r\}.$$

On appelle **sphère de centre a et de rayon r** *l'ensemble*

$$S(a,r) = \{x \in E,\ d(a,x) = r\}.$$

Définition 9 (Partie bornée)
Une partie $A \subset E$ est dite **bornée** *s'il existe $a \in E$ et $r \in]0;+\infty[$ tel que $A \subset B_f(a,r)$.*

Lemme 10 (Caractérisation des parties bornées)
Une partie $A \subset E$ est bornée si et seulement si $\exists M > 0,\ \forall x \in A,\ \|x\| \leq M$.

3) Segments et convexité des boules

E désigne ici un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Définition 11 (Segment)
Etant donnés deux points a et b de E, on appelle **segment $[a,b]$** *l'ensemble :*

$$[a,b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Définition 12 (Partie convexe)
Une partie $A \subset E$ est dite **convexe** *si pour tout $(a,b) \in A^2$, $[a,b] \subset A$.*

Propriété 13 (Convexité des boules dans un evn)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Toute boule (ouverte ou fermée) est convexe.

4) Suites et fonctions bornées

Définition 14 (Suite vectorielle)
Une **suite de vecteurs de E** *est une application $u : \mathbb{N} \to E$.*

Notation
Une suite de vecteurs de E sera notée en général u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On notera $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de E indexées par $\mathbb{N}$.

Définition 15 (Suite vectorielle bornée)
Une suite vectorielle $u \in E^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** *si la partie $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est bornée, ce qui équivaut à $\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leq M$.*

Définition 16 (Fonction bornée)
Soit X un ensemble. Une fonction $f : X \to E$ est dite **bornée** *si son image $f(X)$ est une partie bornée de E, ce qui équivaut à $\exists M > 0,\ \forall x \in X,\ \|f(x)\| \leq M$.*

Propriété 17 (Structure d'espace vectoriel des fonctions bornées)
Pour tout ensemble X, l'ensemble $\mathcal{B}(X,E)$ des fonctions bornées de X dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Corollaire 18 (Structure d'espace vectoriel des suites bornées)
L'ensemble $\ell^\infty(E)$ des suites bornées à valeurs dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

II Exemples importants de normes

1) Normes issues d'un produit scalaire

Propriété 19 (Norme associée à un produit scalaire)
Si $(E, (\ .|.\ ))$ est un espace préhilbertien réel, alors l'application $N : x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E.

2) Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Propriété 20 (Normes classiques sur $\mathbb{K}^n$)
Pour tout entier $n \geq 1$, les applications suivantes :

$$\|\ .\ \|_1 : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|\ .\ \|_2 : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$$

$$\|\ .\ \|_\infty : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

sont des normes sur $\mathbb{K}^n$ ($|\ .\ |$ désigne la valeur absolue ou le module, selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

3) Normes sur des espaces de fonctions

Propriété 21 (Norme uniforme sur l'espace des fonctions bornées)
Soit X un ensemble. Pour $f : X \to E$ bornée, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|.$$

L'application $\|\ .\ \|_\infty : f \mapsto \|f\|_\infty$ est alors une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X, E)$.

Corollaire 22 (Norme uniforme sur l'espace des suites bornées)
Pour toute suite bornée $u \in E^{\mathbb{N}}$, on pose

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|.$$

L'application $u \mapsto \|u\|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel $\ell^\infty(E)$.

Propriété 23 (Normes 1 et 2 sur l'espace des fonctions continues)
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

Alors, les applications $\|\ .\ \|_1$ et $\|\ .\ \|_2$ sont des normes sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$.

4) Structure d'evn produit

Propriété 24 (Produit fini d'espaces vectoriels normés)
Soit $(E_1, N_1), \cdots, (E_n, N_n)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Alors, l'application

$$N : E_1 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{R}^+, \qquad x = (x_1, \cdots, x_n) \mapsto N(x) = \max(N_1(x_1), \cdots, N_n(x_n))$$

est une norme sur l'espace vectoriel produit $E_1 \times \cdots \times E_n$.

III Convergence des suites de vecteurs

On fixe un espace vectoriel normé $(E, \| \, . \, \|)$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Lorsque $E = \mathbb{K}$, cet espace sera muni de la valeur absolue / du module.
On rappelle que $E^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E.

1) Définition et premières propriétés

Définition 25 (Suite convergente)
On dit qu'une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est **convergente** *(ou* **converge***) s'il existe un vecteur $\ell \in E$ tel que*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que (u_n) **converge vers $\boldsymbol{\ell}$** *(ou* **tend vers $\boldsymbol{\ell}$***), et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, ou encore $u_n \to \ell$.*
Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est **divergente** *(ou* **diverge***).*

Propriété 26 (Unicité de la limite)
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$, alors $\ell = \ell'$.
On dit alors que ℓ est **la limite** *de (u_n), et on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*

Propriété 27 (Majoration par une suite de limite nulle)
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, soit $\ell \in E$ et soit (α_n) une suite réelle positive.
Si $\|u_n - \ell\| \leq \alpha_n$ à partir d'un certain rang n_0 et si $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Propriété 28 (Toute suite convergente est bornée)
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) converge, alors (u_n) est bornée.

2) Opérations sur les limites

Propriété 29 (Opérations algébriques sur les suites convergentes)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites de $E^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell' \in E$.

- *(i) On a $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.*
- *(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \ell$.*

Propriété 30 (Compatibilité des limites avec la norme / le produit externe)
Soit (λ_n) une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et (u_n) une suite de $E^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{K}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$. Alors :

- *(i) $\|u_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$;*
- *(ii) $\lambda_n u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \ell$.*

Propriété 31 (Limite d'un inverse scalaire)
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors u_n est non nul à partir d'un certain rang et $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}$.

3) Convergence dans un espace produit

Propriété 32 (Convergence d'une suite à valeurs dans un espace produit)
Soit $(E_1, N_1), \cdots, (E_n, N_n)$ *des espaces vectoriels normés sur* $\mathbb{K}$.
On munit l'espace produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ *de la norme* $N : E \to \mathbb{R}^+$ *définie par :*

$$N(x_1, \cdots, x_n) = \max(N_1(x_1), \cdots, N_n(x_n)).$$

Alors, pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_k^{(1)}, \cdots, u_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *et tout vecteur* $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_n) \in E$, *on a :*

$$u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \forall i \in \{1, \cdots, n\},\ u_k^{(i)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_i.$$

4) Algèbres normées

Les $\mathbb{K}$-algèbres sont des cas particuliers de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (en plus de la somme et du produit externe, elles disposent d'un produit "interne"), sur lesquels on s'intéresse à un certain type de normes.

Définition 33 (Norme sous-multiplicative)
Soit A *une* $\mathbb{K}$-*algèbre. Une norme sur* A *est dite* **sous-multiplicative** *lorsque*

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|xy\| \leq \|x\|\ \|y\|.$$

Propriété 34 (Convergence d'un produit dans une algèbre normée)
Soit A *une* $\mathbb{K}$-*algèbre munie d'une norme sous-multiplicative, soit* (u_n) *et* (v_n) *deux suites de* $A^{\mathbb{N}}$. *On suppose que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in A$ *et* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell' \in A$. *Alors* $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$.

5) Suites extraites, valeurs d'adhérence

Définition 35 (Suite extraite)
Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, *on appelle* **suite extraite de** $\boldsymbol{(u_n)}$ *(ou* **sous-suite de** $\boldsymbol{(u_n)}$*) toute suite de la forme* $(u_{\varphi(n)})$, *où* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est une application strictement croissante.*

Lemme 36 (Minoration d'une extractrice)
Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est strictement croissante, alors* $\varphi(n) \geq n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Propriété 37 (Suites extraites d'une suite convergente)
Si (u_n) *converge vers* $\ell \in E$, *alors toute suite extraite de* (u_n) *converge vers* ℓ.

Définition 38 (Valeur d'adhérence d'une suite)
Etant donné une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, *on appelle* **valeur d'adhérence de** $\boldsymbol{(u_n)}$ *tout vecteur* $\ell \in E$ *qui est la limite d'une suite extraite de* (u_n).

Propriété 39 (Valeurs d'adhérence et convergence)

(i) Une suite convergente possède une seule valeur d'adhérence : sa limite.

(ii) Une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

(iii) Une suite qui ne possède pas de valeurs d'adhérence diverge.

IV Comparaison des normes

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 40 (Domination d'une norme par une autre)
Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que $\boldsymbol{N_2}$ **domine** $\boldsymbol{N_1}$ *s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall x \in E, \qquad N_1(x) \leq C N_2(x).$$

Définition 41 (Normes équivalentes)
Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes** *lorsqu'elles se dominent mutuellement, c'est-à-dire lorsqu'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que*

$$\forall x \in E, \qquad N_1(x) \leq C_1 N_2(x) \text{ et } N_2(x) \leq C_2 N_1(x).$$

Propriété 42 (Relation d'équivalence de normes)
La relation "être équivalente à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

Propriété 43 (Invariance du caractère borné par des normes équivalentes)
Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E. Alors :

(i) *Une partie $A \subset E$ est bornée pour N_1 si et seulement si elle est bornée pour N_2.*

(ii) *Une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée pour N_1 si et seulement si elle est bornée pour N_2.*

(iii) *Si X est un ensemble, alors une fonction $f : X \to E$ est bornée pour N_1 si et seulement si elle est bornée pour N_2.*

Propriété 44 (Invariance du caractère convergent par des normes équivalentes)
Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E et soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Alors :
(u_n) converge dans (E, N_1) si et seulement si (u_n) converge dans (E, N_2).
Dans ce cas, les limites sont les mêmes.

Méthode (Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes)
Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 sur E **ne sont pas** *équivalentes, il suffit de trouver une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qui soit bornée (ou convergente) pour une norme et pas pour l'autre.*