CH05 : Espaces vectoriels normés - Généralités

Table des matières

Dans ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

I Normes et espaces vectoriels normés

1) Normes

Définition 1 (Norme)
Une **norme** *sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \implies x = 0_E$ *(séparation) ;*

(ii) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ *(homogénéité) ;*

(iii) $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ *(inégalité triangulaire).*

Remarque
La propriété (ii) entraîne automatiquement $N(0_E) = 0$ (choisir $\lambda = 0$), et $N(-x) = N(x)$ pour tout $x \in E$ (choisir $\lambda = -1$).

Notation
En général, une norme se notera $\| \,.\, \|$ plutôt que N.

Exemple (Valeur absolue et module)
La valeur absolue est une norme sur $E = \mathbb{R}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
Le module est une norme sur $E = \mathbb{C}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, suivant que l'on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-ev ou un $\mathbb{C}$-ev).
Ces propriétés ont été montrées dans le cours de MP2I.

Propriété 2 (Inégalité triangulaire renversée)
Si $\| \,.\, \|$ est une norme sur E, alors :

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|.$$

Preuve
Soit $(x, y) \in E^2$. On a, par l'inégalité triangulaire :

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

donc $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Symétriquement, on a $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$, d'où le résultat puisque $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| = \pm(\|x\| - \|y\|)$.

ATTENTION !
L'inégalité "$\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$" est fausse (c'est l'inverse qui est vrai) !
Mais on a tout de même :

$$\|x - y\| = \|x + (-y)\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Définition 3 (Espace vectoriel normé)
Un **espace vectoriel normé** *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E muni d'une norme $\| \,.\, \|$.*

Remarque
Ainsi, $\mathbb{R}$ est naturellement un espace vectoriel normé (pour la valeur absolue). Sauf mention du contraire, on munira toujours $\mathbb{R}$ de cette norme. Idem pour $\mathbb{C}$ avec le module.

Notation
Souvent, un espace vectoriel normé se note par un couple $(E, \| \,.\|)$, où $\| \,.\|$ est la norme choisie sur l'espace vectoriel E.

Dans la suite, on fixe un espace vectoriel normé $(E, \| \, .\|)$.

Définition 4 (Vecteur unitaire)
Un vecteur $x \in E$ est dit **unitaire** *lorsque $\|x\| = 1$.*

Remarque
Si $K = \mathbb{R}$, alors toute droite $\mathcal{D} \subset E$ contient exactement deux vecteurs unitaires : $\pm \frac{e}{\|e\|}$, où e est n'importe quel vecteur non nul de $\mathcal{D}$.

2) Distances, boules

Définition 5 (Distance associée à une norme)
On appelle **distance associée à la norme** $\| \, . \, \|$ *l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ définie par*

$$\forall (x, y) \in E^2, \qquad d(x, y) = \|y - x\|.$$

Propriété 6 (Propriétés de la distance)
L'application distance $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ possède les propriétés suivantes :

(i) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = 0 \iff x = y$ *(séparation) ;*

(ii) $\forall (x, y) \in E^2,\ d(y, x) = d(x, y)$ *(symétrie) ;*

(iii) $\forall (x, y, z) \in E^3,\ d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ *(inégalité triangulaire).*

Preuve
Découle directement des propriétés de la norme.

Définition 7 (Distance d'un point à une partie)
Etant donné un point $x \in E$ et une partie non vide $A \subset E$, on appelle **distance de** x **à** A *le réel positif :*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Remarque
Ce réel positif est bien défini car la partie $\{\|x - a\|,\ a \in A\} \subset \mathbb{R}$ est non vide (comme A) et minorée par 0, donc elle possède une borne inférieure, **pas nécessairement atteinte**.

<u>ATTENTION !</u>
Il n'existe donc pas toujours de point $a_0 \in A$ tel que $d(x, a_0) = d(x, A)$.

Définition 8 (Boule fermée, boule ouverte, sphère)
Soit $a \in E$ et soit un réel $r > 0$.
On appelle **boule ouverte de centre** a **et de rayon** r *l'ensemble*

$$B(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) < r\}.$$

On appelle **boule fermée de centre** a **et de rayon** r *l'ensemble*

$$B_f(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) \leq r\}.$$

On appelle **sphère de centre** a **et de rayon** r *l'ensemble*

$$S(a, r) = \{x \in E,\ d(a, x) = r\}.$$

Définition 9 (Partie bornée)
Une partie $A \subset E$ est dite **bornée** *s'il existe $a \in E$ et $r \in]0; +\infty[$ tel que $A \subset B_f(a, r)$.*

Lemme 10 (Caractérisation des parties bornées)
Une partie $A \subset E$ est bornée si et seulement si $\exists M > 0,\ \forall x \in A,\ \|x\| \leq M$.

Preuve

$\boxed{\Leftarrow}$ S'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in A,\ \|x\| \leq M$, alors $A \subset B_f(0_E, M)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ S'il existe $a \in E$ et $r \in]0;+\infty[$ tel que $A \subset B_f(a, r)$, alors, pour tout $x \in A$, on a

$$\|x\| = \|(x-a)+a\| \leq \|x-a\| + \|a\| \leq r + \|a\|,$$

d'où le résultat avec $M = r + \|a\|$.

3) Segments et convexité des boules

E désigne ici un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé.

Définition 11 (Segment)
Etant donnés deux points a et b de E, on appelle **segment $[a,b]$** *l'ensemble :*

$$[a,b] = \{(1-\lambda)a + \lambda b,\ 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Remarque
Le segment $[a,b]$ contient notamment le point $m = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, appelé "milieu" du segment $[a,b]$.

Dessin (Illustration de la paramétrisation du segment)

Définition 12 (Partie convexe)
Une partie $A \subset E$ est dite **convexe** *si pour tout $(a,b) \in A^2$, $[a,b] \subset A$.*

Remarque

- *Ces notions sont valables dans tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, pas besoin d'avoir une norme sur E.*
- *A est convexe $\iff \forall (a,b) \in A^2,\ \forall \lambda \in [0,1],\ (1-\lambda)a + \lambda b \in A$.*

Dessin (Partie convexe)

Exemple

- $\emptyset$ et E sont convexes.
- Tout segment $[a,b] \subset E$ est convexe : en effet, si x, y sont dans $[a,b]$, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ tels que $x = (1-\lambda_1)a + \lambda_1 b$ et $y = (1-\lambda_2)a + \lambda_2 b$, donc pour tout $\lambda \in [0,1]$:

$$(1-\lambda)x + \lambda y = (1-\lambda)\left((1-\lambda_1)a + \lambda_1 b\right) + \lambda\left((1-\lambda_2)a + \lambda_2 b\right)$$

$$= (1 - \lambda_1 - \lambda(\lambda_2 - \lambda_1))a + (\lambda_1 + \lambda(\lambda_2 - \lambda_1))b = (1-t)a + tb,$$

  avec $t = \lambda_1 + \lambda(\lambda_2 - \lambda_1) \in [0,1]$ car :
  * si $\lambda_1 \leq \lambda_2$, $0 \leq \lambda_1 \leq t \leq \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda_2 \leq 1$;
  * si $\lambda_1 > \lambda_2$, $0 \leq \lambda_2 \leq t \leq \lambda_1 \leq 1$.

  On a donc montré que $\forall (x,y) \in [a,b]^2,\ (1-\lambda)x + \lambda y \in [a,b]$, donc $[a,b]$ est convexe.
- Tout sev F de E est convexe, car une combinaison convexe de deux vecteurs ($(1-\lambda)a + \lambda b$ avec $\lambda \in [0,1]$) est un cas particulier de combinaison linéaire, et tout sev est stable par combinaison linéaire.
- Tout sous-espace affine X de E est convexe : si $X = \emptyset$, c'est évident.
  Si X est non vide, alors si on fixe $x_0 \in X$, on a $X = x_0 + F$, où F est un sev de E. Dans ce cas, pour tout $(x,y) \in X^2$, on a $x = x_0 + a$ et $y = x_0 + b$ avec $(a,b) \in F^2$, donc pour tout $\lambda \in [0,1]$:

$$(1-\lambda)x + \lambda y = x_0 + \underbrace{(1-\lambda)a + \lambda b}_{\in F} \in X.$$

Propriété 13 (Convexité des boules dans un evn)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Toute boule (ouverte ou fermée) est convexe.

Preuve
Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrons que la boule ouverte $B(a, r)$ est convexe.
Etant donnés x, y dans $B(a, r)$, on a $\|x - a\| < r$ et $\|y - a\| < r$, donc pour tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y - a\| = \|(1-\lambda)(x-a) + \lambda(y-a)\| \leq (1-\lambda)\|x-a\| + \lambda\|y-a\| < (1-\lambda)r + \lambda r = r,$$

ce qui montre bien que $(1-\lambda)x + \lambda y \in B(a, r)$. On procède de même pour la boule fermée $B_f(a, r)$.

4) Suites et fonctions bornées

Définition 14 (Suite vectorielle)
Une **suite de vecteurs de** E *est une application* $u : \mathbb{N} \to E$.

Notation
Une suite de vecteurs de E sera notée en général u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On notera $E^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de E indexées par $\mathbb{N}$.

Remarque
Bien entendu, dans cette indexation, on peut remplacer $\mathbb{N}$ par $\mathbb{N}^*$ ou encore $[\![n_0; +\infty[\![$, $n_0 \in \mathbb{Z}$ étant un entier quelconque.

Définition 15 (Suite vectorielle bornée)
Une suite vectorielle $u \in E^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** *si la partie $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est bornée, ce qui équivaut à $\exists M > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leq M$.*

Définition 16 (Fonction bornée)
Soit X un ensemble. Une fonction $f : X \to E$ est dite **bornée** *si son image $f(X)$ est une partie bornée de E, ce qui équivaut à $\exists M > 0,\ \forall x \in X,\ \|f(x)\| \leq M$.*

Propriété 17 (Structure d'espace vectoriel des fonctions bornées)
Pour tout ensemble X, l'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des fonctions bornées de X dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve
$\mathcal{B}(X, E)$ est clairement un sous-espace vectoriel de E^X (le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions de X dans E), car :

- la fonction nulle $0_{E^X} : x \mapsto 0_E$ est bornée ;
- si $f : X \to E$ et $g : X \to E$ sont bornées, alors pour tout $\lambda \in K$, $\lambda f + g$ est bornée car pour tout $x \in X$: $\|(\lambda f + g)(x)\| \leq |\lambda|\,\|f(x)\| + \|g(x)\|$.

Corollaire 18 (Structure d'espace vectoriel des suites bornées)
L'ensemble $\ell^\infty(E)$ des suites bornées à valeurs dans E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Preuve
Les suites bornées de $E^{\mathbb{N}}$ sont exactement les éléments de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$.

II Exemples importants de normes

1) Normes issues d'un produit scalaire

Rappel (Structure d'espace préhilbertien réel)
Un **espace préhilbertien réel** est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un **produit scalaire**, c'est-à-dire une application $(\ .|.\ ) : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(*i*) $\forall (x,y) \in E^2,\ (y|x) = (x|y)$ (*symétrie*) ;

(*ii*) $\forall (x,y,z) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$:
$(\lambda x + y|z) = \lambda(x|z) + (y|z)$ (*linéarité à gauche*)
$(x|\lambda y + z) = \lambda(x|y) + (x|z)$ (*linéarité à droite*) ;

(*iii*) $\forall x \in E,\ (x|x) \geq 0$ (*positivité*) ;

(*iv*) $\forall x \in E,\ ((x|x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E)$ (*caractère défini*).

(on résume cela en disant qu'un produit scalaire est une *forme bilinéaire symétrique définie positive*).

Propriété 19 (Norme associée à un produit scalaire)
Si $(E, (\ .|.\ ))$ est un espace préhilbertien réel, alors l'application $N : x \mapsto \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E.

Preuve
Le fait que N est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vient de la propriété de positivité du produit scalaire. Ensuite, on a facilement

$$N(x) = 0 \implies (x|x) = 0 \implies x = 0_E;$$

$$N(\lambda x) = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 (x|x)} = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{(x|x)} = |\lambda| N(x).$$

Quant à l'inégalité triangulaire, on utilise le développement :

$$N^2(x+y) = (x+y|x+y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) = N^2(x) + 2(x|y) + N^2(y),$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir cours MP2I) :

$$|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)},$$

qui entraîne :

$$N^2(x+y) \leq N^2(x) + 2|(x|y)| + N^2(y) \leq N^2(x) + 2N(x)N(y) + N^2(y) = (N(x)+N(y))^2,$$

et donc (puisque N est positive) : $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

2) Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$

Propriété 20 (Normes classiques sur $\mathbb{K}^n$)
Pour tout entier $n \geq 1$, les applications suivantes :

$$\|\ .\ \|_1 : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\|\ .\ \|_2 : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2},$$

$$\|\ .\ \|_\infty : (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

sont des normes sur $\mathbb{K}^n$ ($|\ .\ |$ désigne la valeur absolue ou le module, selon que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Preuve
Ces trois applications sont clairement bien définies, à valeurs positives.
On vérifie facilement la propriété de séparation.
Pour l'homogénéité : c'est immédiat pour $\| \,.\, \|_1$ et $\| \,.\, \|_2$, et pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$:

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda x_i| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |\lambda| \|x\|_\infty$$

car $|\lambda| \geq 0$.
Pour l'inégalité triangulaire : en notant $x = (x_1, \cdots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^n$, on a (en utilisant l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{K}$, déjà connue) :

$$\|x + y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \|x\|_1 + \|y\|_1,$$

ainsi que

$$\|x + y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i + y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$$

car $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$.
Enfin,

$$\|x + y\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2,$$

et pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$:

$$|x_i + y_i|^2 \leq (|x_i| + |y_i|)^2 = |x_i|^2 + 2|x_i||y_i| + |y_i|^2,$$

donc en sommant, on obtient :

$$\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2(u|v) + \|y\|_2^2,$$

en posant $u = (|x_1|, \cdots, |x_n|)$ et $v = (|y_1|, \cdots, |y_n|)$, et $(u|v) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. On termine à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$2(u|v) \leq 2\sqrt{(u|u)}\sqrt{(v|v)} = 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2} = 2\|x\|_2\|y\|_2,$$

ce qui entraîne

$$\|x + y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2,$$

puis $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$.

Remarque

- *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors la norme $\| \,.\, \|_2$ est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.*
- *Si $n = 1$, alors ces trois normes coïncident avec $| \,.\, |$ (la valeur absolue / le module).*

Dessin (Les boules unités classiques de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^2$)

3) Normes sur des espaces de fonctions

Propriété 21 (Norme uniforme sur l'espace des fonctions bornées)
Soit X un ensemble. Pour $f : X \to E$ bornée, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

L'application $\| \,.\, \|_\infty : f \mapsto \|f\|_\infty$ est alors une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(X, E)$.

Preuve
Puisqu'on se limite à des fonctions bornées, l'application $\| \ . \ \|_\infty$ est clairement définie et à valeurs positives.
Montrons la séparation : soit $f \in \mathcal{B}(X, E)$. Puisque $\|f(x)\| \geq 0$ pour tout $x \in X$, on a :

$$\|f\|_\infty = 0 \iff \sup_{x \in X} \|f(x)\| = 0 \iff \forall x \in X, \ \|f(x)\| = 0 \iff f = 0_{E^X}.$$

Pour l'homogénéité : pour $f \in \mathcal{B}(X, E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|\lambda f(x)\| = \sup_{x \in X} |\lambda| \, \|f(x)\| = |\lambda| \sup_{x \in X} \|f(x)\| = |\lambda| \, \|f\|_\infty,$$

car $|\lambda| \geq 0$.
Pour l'inégalité triangulaire : pour $f, g \in \mathcal{B}(X, E)$, on a

$$\forall x \in X, \quad \|(f+g)(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

donc la constante $\|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ est un majorant de $\|f+g\|$ sur X, ce qui montre bien que

$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Remarque

- *Si $E = \mathbb{K}$, alors $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$, où $| \ . \ |$ désigne la valeur absolue ou le module suivant que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.*
- *Si $X = [a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$ et si $E = \mathbb{K}$, alors l'application $\| \ . \ \|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ (car toute fonction continue sur un segment est bornée).*

Corollaire 22 (Norme uniforme sur l'espace des suites bornées)
Pour toute suite bornée $u \in E^{\mathbb{N}}$, on pose

$$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|.$$

L'application $u \mapsto \|u\|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel $\ell^\infty(E)$.

Preuve
Immédiat par la prop 21 : c'est le cas où $X = \mathbb{N}$.

Propriété 23 (Normes 1 et 2 sur l'espace des fonctions continues)
Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$, on pose :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

Alors, les applications $\| \ . \ \|_1$ et $\| \ . \ \|_2$ sont des normes sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$.

Preuve
Tout d'abord, les applications $\| \ . \ \|_1$ et $\| \ . \ \|_2$ sont bien définies et à valeurs positives car pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{K})$, les fonctions $|f|$ et $|f|^2$ sont continues et positives sur $[a, b]$ donc leur intégrale existe et est positive.
Montrons la séparation : si $\|f\|_1 = 0$, alors la fonction continue et positive $|f|$ a une intégrale nulle sur $[a, b]$ avec $a < b$, donc $|f|$ est identiquement nulle sur $[a, b]$ (voir cours MP2I), i.e. $f = 0_{\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})}$.
De même pour la norme 2.
L'homogénéité de $\| \ . \ \|_1$ et $\| \ . \ \|_2$ est évidente par linéarité de l'intégrale et du fait que $\sqrt{|\lambda|^2} = |\lambda|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
Montrons enfin l'inégalité triangulaire : elle est facile pour $\| \ . \ \|_1$ car

$$\forall x \in [a, b], \quad |(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|,$$

donc $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$ par croissance et linéarité de l'intégrale.
Pour la norme 2, c'est un peu plus subtil :

$$\forall x \in [a,b], \quad |(f+g)(x)|^2 \leq (|f(x)|+|g(x)|)^2 = |f(x)|^2 + 2|f(x)||g(x)| + |g(x)|^2,$$

donc on obtient par linéarité de l'intégrale :

$$\|f+g\|_2^2 = \|f\|_2^2 + 2(u|v) + \|g\|_2^2,$$

où $u = |f|$, $v = |g|$ et $(u|v) = \int_a^b u(x)v(x)dx$. Vu qu'on sait déjà (voir cours MP2I) que $(u,v) \mapsto (u|v)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$, on peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz (encore !) pour avoir la majoration :

$$2(u|v) \leq 2\sqrt{(u|u)}\sqrt{(v|v)} = 2\sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}\sqrt{\int_a^b |g(x)|^2 dx} = 2\|f\|_2\|g\|_2.$$

On conclut :

$$\|f+g\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 + 2\|f\|_2\|g\|_2 + \|g\|_2^2 = (\|f\|_2 + \|g\|_2)^2,$$

et donc $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.

ATTENTION !
L'hypothèse $a < b$ est essentielle !

Remarque
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors la norme $\| \,.\, \|_2$ est la norme associée au produit scalaire :

$$(f,g) \mapsto (f|g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

4) Structure d'evn produit

Propriété 24 (Produit fini d'espaces vectoriels normés)
Soit $(E_1,N_1),\cdots,(E_n,N_n)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Alors, l'application

$$N : E_1 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{R}^+, \qquad x = (x_1,\cdots,x_n) \mapsto N(x) = \max(N_1(x_1),\cdots,N_n(x_n))$$

est une norme sur l'espace vectoriel produit $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Preuve (non traitée en classe)
Mêmes vérifications que pour la norme "infinie" $\| \,.\, \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.

Remarque

- *Ainsi, tout produit fini d'espaces vectoriels normés possède naturellement une structure d'espace vectoriel normé.*
- *Dans le cas où $E_1 = \cdots = E_n = \mathbb{K}$ et $N_1 = \cdots = N_n = |.|$, on retrouve la norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.*

III Convergence des suites de vecteurs

On fixe un espace vectoriel normé $(E, \| \, . \, \|)$ sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Lorsque $E = \mathbb{K}$, cet espace sera muni de la valeur absolue / du module.
On rappelle que $E^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E.

1) Définition et premières propriétés

Définition 25 (Suite convergente)
On dit qu'une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est **convergente** *(ou* **converge***) s'il existe un vecteur $\ell \in E$ tel que*

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \qquad n \geq n_0 \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on dit que (u_n) **converge vers $\boldsymbol{\ell}$** *(ou* **tend vers $\boldsymbol{\ell}$***), et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, ou encore $u_n \to \ell$.*
Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est **divergente** *(ou* **diverge***).*

Remarque (Suites définies à partir d'un certain rang)
Le fait qu'une suite soit convergente ne dépend pas du rang N à partir duquel elle est définie. La même définition s'adapte donc aux suites $(u_n)_{n\geq N}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Remarque (Lien avec la convergence des suites réelles)

- *On a évidemment :*
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \|u_n - \ell\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Ainsi la convergence d'une suite vectorielle s'exprime par la convergence vers 0 d'une suite réelle positive.
- *Lorsque $(E, \| \, . \, \|) = (\mathbb{R}, | \, . \, |)$, on retrouve évidemment la définition de la convergence des suites réelles étudiée en MP2I.*

Remarque (Traduction géométrique)
"$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$" signifie que toute boule fermée de centre ℓ et de rayon $\varepsilon > 0$ contient tous les u_n à partir d'un certain rang. En effet :

$$\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon \iff u_n \in B_f(\ell, \varepsilon).$$

Propriété 26 (Unicité de la limite)
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$, alors $\ell = \ell'$.
On dit alors que ℓ est **la limite** *de (u_n), et on note $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.*

Preuve (Version avec des inégalités)
Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de (u_n) vers ℓ et ℓ', il existe deux entiers naturels n_1, n_2 tels que

$$n \geq n_1 \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon, \qquad n \geq n_2 \implies \|u_n - \ell'\| \leq \varepsilon.$$

Donc en posant $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on obtient par inégalité triangulaire :

$$n \geq n_0 \implies \|\ell - \ell'\| \leq \|\ell - u_n\| + \|u_n - \ell'\| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, le réel positif $\|\ell - \ell'\|$ est inférieur à n'importe quel réel strictement positif, il est donc nul, ce qui montre que $\ell = \ell'$.

Preuve (Version géométrique)
Soit $\varepsilon > 0$. Les boules $B_f(\ell, \varepsilon)$ et $B_f(\ell', \varepsilon)$ contiennent tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ (prendre le maximum des deux rangs). Mais si $\ell \neq \ell'$, les boules $B_f(\ell, \varepsilon)$ et $B_f(\ell', \varepsilon)$ sont disjointes pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit (en fait pour $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\|\ell - \ell'\|$), donc on a une contradiction.
On conclut $\ell = \ell'$.

Remarque
Tout se passe donc comme pour le cas des suites réelles. Mais attention, d'autres notions sont spécifiques aux suites réelles et ne se généralisent pas (la monotonie, le caractère majoré, minoré, ...).

Propriété 27 (Majoration par une suite de limite nulle)
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, soit $\ell \in E$ et soit (α_n) une suite réelle positive.
Si $\|u_n - \ell\| \leq \alpha_n$ à partir d'un certain rang n_0 et si $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Preuve
On fixe un réel $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_1 \implies \alpha_n = |\alpha_n| \leq \varepsilon.$$

Donc en posant $n_2 = \max(n_0, n_1)$, on a

$$n \geq n_2 \implies \|u_n - \ell\| \leq \alpha_n \leq \varepsilon,$$

ce qui montre la convergence voulue.

Propriété 28 (Toute suite convergente est bornée)
Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) converge, alors (u_n) est bornée.

Preuve
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$, alors à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on a $\|u_n - \ell\| \leq 1$ (par exemple). Par l'inégalité triangulaire, cela entraîne :

$$\|u_n\| = \|(u_n - \ell) + \ell\| \leq 1 + \|\ell\|.$$

On a donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leq \max(\|u_0\|, \cdots, \|u_{n_0-1}\|, 1 + \|\ell\|)$
(bien noter que cette dernière constante ne dépend pas de n !).

ATTENTION !
La réciproque est fausse (déjà vu pour les suites réelles, avec $u_n = (-1)^n$).

2) Opérations sur les limites

Propriété 29 (Opérations algébriques sur les suites convergentes)
Soit (u_n) et (v_n) deux suites de $E^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell' \in E$.

(i) On a $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell'$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda\ell$.

Preuve (non traitée en classe)
Fixons un réel $\varepsilon > 0$.

(i) Par convergence des deux suites, on peut choisir un entier n_0 tel que

$$n \geq n_0 \implies (\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon/2 \text{ et } \|v_n - \ell'\| \leq \varepsilon/2)$$

(prendre le maximum des deux rangs correspondant aux deux suites). On obtient alors par inégalité triangulaire :

$$n \geq n_0 \implies \|(u_n + v_n) - (\ell + \ell')\| \leq \|u_n - \ell\| + \|v_n - \ell'\| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre la convergence voulue.

(ii) Si $\lambda = 0$, alors le résultat est trivial (la suite nulle tend vers 0_E).
Si $\lambda \neq 0$, alors par convergence de (u_n), il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0 \implies \|u_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda|}$, et donc par homogénéité :

$$n \geq n_0 \implies \|\lambda u_n - \lambda \ell\| = |\lambda| \, \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Remarque
Ainsi, l'ensemble des suites convergentes à valeurs dans E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.

Propriété 30 (Compatibilité des limites avec la norme / le produit externe)
Soit (λ_n) une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et (u_n) une suite de $E^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\lambda_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{K}$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in E$. Alors :

(i) $\|u_n\| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \|\ell\|$;

(ii) $\lambda_n u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \ell$.

Preuve

(i) Par l'inégalité triangulaire renversée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \big| \, \|u_n\| - \|\ell\| \, \big| \leq \|u_n - \ell\|.$$

Par hypothèse, $\lim_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\| = 0$, donc par majoration : $\lim_{n\to+\infty} \big| \, \|u_n\| - \|\ell\| \, \big| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\| = \|\ell\|$.

(ii) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|\lambda_n u_n - \lambda \ell\| = \|\lambda_n u_n - \lambda_n \ell + \lambda_n \ell - \lambda \ell\| = |\lambda_n| \, \|u_n - \ell\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|\ell\|.$$

La suite (λ_n) étant convergente, elle est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |\lambda_n| \leq M$. D'où

$$\|\lambda_n u_n - \lambda \ell\| \leq M \, \|u_n - \ell\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|\ell\|.$$

Par hypothèse et par opérations algébriques, on a alors $\lim_{n\to+\infty} (M \, \|u_n - \ell\| + |\lambda_n - \lambda| \, \|\ell\|) = 0$, donc par majoration, on en déduit $\lim_{n\to+\infty} \|\lambda_n u_n - \lambda \ell\| = 0$, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n u_n = \lambda \ell$.

Remarque
Dans le cas où $E = \mathbb{K}$ (muni de la valeur absolue), on retrouve ainsi la limite du produit de deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ (traité dans le cours de MP2I). Donc l'ensemble des suites convergentes à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une sous-algèbre de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Propriété 31 (Limite d'un inverse scalaire)
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, alors u_n est non nul à partir d'un certain rang et $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ell}$.

Preuve
Montrons déjà que $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.
Par convergence de (u_n), il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2} \implies |\ell| - |u_n| \leq \big| |u_n| - |\ell| \big| \leq |u_n - \ell| \leq \frac{|\ell|}{2}$$

(par inégalité triangulaire renversée). Donc $n \geq n_0 \implies |u_n| \geq \dfrac{|\ell|}{2} > 0$, ce qui montre que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite à termes non nuls, et on a

$$\forall n \geq n_0, \qquad \left| \frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{|u_n||\ell|} \leq \frac{2}{|\ell|^2} |u_n - \ell|.$$

Ensuite, étant donné un réel $\varepsilon > 0$, il existe par convergence de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ un entier n_1 tel que

$$n \geq n_1 \implies |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon|\ell|^2}{2} \implies \left|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{\ell}\right| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$.

3) Convergence dans un espace produit

Propriété 32 (Convergence d'une suite à valeurs dans un espace produit)
Soit $(E_1, N_1), \cdots, (E_n, N_n)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.
On munit l'espace produit $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ de la norme $N : E \to \mathbb{R}^+$ définie par :

$$N(x_1, \cdots, x_n) = \max(N_1(x_1), \cdots, N_n(x_n)).$$

Alors, pour toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_k^{(1)}, \cdots, u_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ et tout vecteur $\ell = (\ell_1, \cdots, \ell_n) \in E$, on a :

$$u_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \iff \forall i \in \{1, \cdots, n\},\ u_k^{(i)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \ell_i.$$

Preuve
On a pour tout $k \in \mathbb{N}$: $N(u_k - \ell) = \max\limits_{1\leq i\leq n} N_i(u_k^{(i)} - \ell_i)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $N(u_k - \ell) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors puisque

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ N_i(u_k^{(i)} - \ell_i) \leq N(u_k - \ell),$$

on en déduit par majoration que $N_i(u_k^{(i)} - \ell_i) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $N_i(u_k^{(i)} - \ell_i) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, alors par opérations algébriques, on a $\sum\limits_{i=1}^{n} N_i(u_k^{(i)} - \ell_i) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (le nombre de termes de la somme ne dépend pas de k), donc puisque

$$N(u_k - \ell) \leq \sum_{i=1}^{n} N_i(u_k^{(i)} - \ell_i),$$

on en déduit par majoration que $N(u_k - \ell) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exemple (Cas de $\mathbb{K}^n$)
Ainsi, dans l'espace normé $(\mathbb{K}^n, \|\ .\ \|_\infty)$, la convergence d'une suite de vecteurs équivaut à la convergence "composante par composante". Par exemple, la suite $\left(\frac{1}{n}, \frac{\sin(n)}{n}\right)_{n\geq 1}$ tend vers $(0, 0)$, et la suite $\left((-1)^n, \frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ diverge.

4) Algèbres normées

Les $\mathbb{K}$-algèbres sont des cas particuliers de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (en plus de la somme et du produit externe, elles disposent d'un produit "interne"), sur lesquels on s'intéresse à un certain type de normes.

Définition 33 (Norme sous-multiplicative)
Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. Une norme sur A est dite **sous-multiplicative** *lorsque*

$$\forall (x, y) \in A^2, \quad \|xy\| \leq \|x\|\ \|y\|.$$

Propriété 34 (Convergence d'un produit dans une algèbre normée)
Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre munie d'une norme sous-multiplicative, soit (u_n) et (v_n) deux suites de $A^{\mathbb{N}}$. On suppose que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in A$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell' \in A$. Alors $u_n v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\ell'$.

Preuve
Similaire à la prop. 30, en utilisant la majoration :

$$\|u_n v_n - \ell\ell'\| = \|u_n(v_n - \ell') + (u_n - \ell)\ell'\| \leq \|u_n\|\|v_n - \ell'\| + \|u_n - \ell\|\|\ell'\|.$$

Remarque
Cette propriété reste vraie si la norme dont on munit A vérifie :

$$\exists C > 0,\ \forall (x, y) \in A^2, \quad \|xy\| \leq C\|x\|\ \|y\|.$$

5) Suites extraites, valeurs d'adhérence

Définition 35 (Suite extraite)
Si $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, on appelle **suite extraite de (u_n)** *(ou* **sous-suite de (u_n)***) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.*

Lemme 36 (Minoration d'une extractrice)
Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve
Se montre par récurrence : $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ donc $\varphi(0) \geq 0$.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si $\varphi(n) \geq n$, alors par stricte croissance de φ, on a $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$ donc $\varphi(n+1) > n$. Mais ce sont des entiers, donc $\varphi(n+1) \geq n+1$.

Propriété 37 (Suites extraites d'une suite convergente)
Si (u_n) converge vers $\ell \in E$, alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.

Preuve
Si (u_n) converge vers $\ell \in E$, alors étant un réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que

$$n \geq n_0 \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Pour toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})$, on a alors par le lemme précédent :

$$n \geq n_0 \implies \varphi(n) \geq n \geq n_0 \implies \|u_{\varphi(n)} - \ell\| \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que $(u_{\varphi(n)})$ converge vers ℓ.

Définition 38 (Valeur d'adhérence d'une suite)
Etant donné une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$, on appelle **valeur d'adhérence de (u_n)** *tout vecteur $\ell \in E$ qui est la limite d'une suite extraite de (u_n).*

Propriété 39 (Valeurs d'adhérence et convergence)

(i) Une suite convergente possède une seule valeur d'adhérence : sa limite.

(ii) Une suite qui possède au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

(iii) Une suite qui ne possède pas de valeurs d'adhérence diverge.

Preuve
Le point (i) résulte de la proposition 37 et de l'unicité de la limite.
Les points (ii) et (iii) s'obtiennent par contraposée de (i).

<u>ATTENTION !</u>
Une suite qui possède une seule valeur d'adhérence peut quand même diverger !

Exemple
La suite u définie par $u_n = 0$ si n est pair et $u_n = n$ si n est impair a pour seule valeur d'adhérence 0, et elle diverge.
En effet :

- toute valeur d'adhérence de (u_n) est nécessairement positive ou nulle, puisque $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- 0 est bien valeur d'adhérence car la suite extraite $(u_{2n}) = (0)$ tend vers 0 ;
- si une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers $\lambda > 0$, alors à partir d'un certain rang n_0, on a
$$0 < \frac{\lambda}{2} \leq u_{\varphi(n)} \leq \frac{3\lambda}{2},$$
donc
$$n \geq n_0 \implies \varphi(n) \text{ impair } \implies \frac{\lambda}{2} \leq \varphi(n) \leq \frac{3\lambda}{2},$$
ce qui est impossible car $\varphi(n) \geq n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc 0 est la seule valeur d'adhérence de (u_n) ;
- pourtant, la suite extraite $(u_{2n+1}) = (2n+1)$ diverge vers $+\infty$, donc (u_n) diverge.

IV Comparaison des normes

E désigne toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 40 (Domination d'une norme par une autre)
Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que **N_2 domine N_1** *s'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall x \in E, \qquad N_1(x) \leq C N_2(x).$$

Définition 41 (Normes équivalentes)
Soient N_1 et N_2 deux normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont **équivalentes** *lorsqu'elles se dominent mutuellement, c'est-à-dire lorsqu'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que*

$$\forall x \in E, \qquad N_1(x) \leq C_1 N_2(x) \text{ et } N_2(x) \leq C_2 N_1(x).$$

Remarque
N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement il existe deux constantes $C, C' > 0$ telles que

$$C N_1 \leq N_2 \leq C' N_1.$$

Propriété 42 (Relation d'équivalence de normes)
La relation "être équivalente à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E.

Preuve (non traitée en classe)
La symétrie est directe par la définition 41.
La réflexivité est claire car toute norme N vérifie $N \leq CN$ avec $C = 1$, donc N est équivalente à N.
Transitivité : si N_1 et N_2 sont équivalentes, ainsi que N_2 et N_3, alors il existe quatre constantes $A, A', B, B' > 0$ telles que

$$A N_1 \leq N_2 \leq A' N_1, \qquad B N_2 \leq N_3 \leq B' N_2.$$

Cela entraîne

$$(BA) N_1 \leq B N_2 \leq N_3 \leq B' N_2 \leq (B'A') N_1,$$

donc N_1 et N_3 sont équivalentes.

Propriété 43 (Invariance du caractère borné par des normes équivalentes)
Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E. Alors :

- *(i) Une partie $A \subset E$ est bornée pour N_1 si et seulement si elle est bornée pour N_2.*
- *(ii) Une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée pour N_1 si et seulement si elle est bornée pour N_2.*
- *(iii) Si X est un ensemble, alors une fonction $f : X \to E$ est bornée pour N_1 si et seulement si elle est bornée pour N_2.*

Preuve (non traitée en classe)

- (i) Si A est bornée dans l'evn (E, N_1), alors il existe une constante $M > 0$ telle que $\forall x \in A$, $N_1(x) \leq M$. Vu les hypothèses, il existe une constante $C > 0$ telle que $N_2 \leq C N_1$, donc $\forall x \in A,\ N_2(x) \leq C N_1(x) \leq CM$, ce qui montre que A est bornée dans l'evn (E, N_2). Puisque N_1 et N_2 jouent ici des rôles symétriques, on obtient également l'implication réciproque.
- (ii) Direct d'après (i) car (u_n) est bornée pour N_1 ssi la partie $\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est bornée dans (E, N_1).
- (iii) Direct d'après (i) car f est bornée pour N_1 ssi la partie $f(X) = \{f(x),\ x \in X\}$ est bornée dans (E, N_1).

ATTENTION !
Ces équivalences ne sont plus vraies lorsqu'on dispose de normes non équivalentes ! Certaines parties de E peuvent être bornées pour une norme mais pas pour une autre.

Propriété 44 (Invariance du caractère convergent par des normes équivalentes)
Soit N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur E et soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Alors :
(u_n) converge dans (E, N_1) si et seulement si (u_n) converge dans (E, N_2).
Dans ce cas, les limites sont les mêmes.

Preuve
Supposons que (u_n) converge vers ℓ dans (E, N_1). Alors $N_1(u_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par hypothèse d'équivalence des normes, il existe $C > 0$ telle que $N_2 \leq CN_1$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq N_2(u_n - \ell) \leq CN_1(u_n - \ell).$$

Par majoration, on en déduit $N_2(u_n - \ell) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui montre que (u_n) converge vers ℓ dans (E, N_2).
Puisque N_1 et N_2 jouent ici des rôles symétriques, on obtient également l'implication réciproque.

Remarque
On dispose du résultat important suivant, que l'on montrera plus tard (cf. CH.7 de topologie) :
"si E est de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes".

Exemple
Montrer que sur $\mathbb{K}^n$, les normes $\|.\|_\infty$, $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes et trouver les constantes optimales.

On obtient facilement les inégalités

$$\|.\|_\infty \leq \|.\|_1 \leq n\|.\|_\infty,$$

$$\|.\|_\infty \leq \|.\|_2 \leq \sqrt{n}\|.\|_\infty,$$

et les constantes sont optimales (on trouve des vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ qui vérifient l'égalité dans chaque cas).

Pour comparer les normes 1 et 2, c'est un peu plus compliqué. Pour $x \in \mathbb{K}^n$, on a déjà :

$$\|x\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} |x_i x_j| \geq \|x\|_2^2.$$

En outre, en notant $(.|.)$ le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, on a, en posant $u = (|x_1|, \cdots, |x_n|)$, $v = (1, \cdots, 1)$ et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|x\|_1 = (u|v) \leq \sqrt{(u|u)}\sqrt{(v|v)} = \|x\|_2\sqrt{n}.$$

Donc finalement :

$$\|.\|_2 \leq \|.\|_1 \leq \sqrt{n}\|.\|_2,$$

et les constantes sont optimales là aussi.

Remarque
Les inégalités $\|.\|_\infty \leq \|.\|_2 \leq \|.\|_1$ traduisent le fait que les boules unités fermées respectives de ces trois normes, notées respectivement B_∞, B_2, B_1, vérifient les inclusions suivantes :

$$B_1 \subset B_2 \subset B_\infty$$

(faire un dessin). En effet :

$$\|x\|_1 \leq 1 \implies \|x\|_2 \leq 1 \implies \|x\|_\infty \leq 1.$$

Méthode (Pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes)
Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 sur E **ne sont pas** *équivalentes, il suffit de trouver une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ qui soit bornée (ou convergente) pour une norme et pas pour l'autre.*

Exemple

Montrer que sur $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{K})$*, les normes* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_\infty$ *ne sont pas équivalentes.*

Pour cela, on considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions affines par morceaux sur $[a,b]$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad f_n(x) = \begin{cases} n^2\left(a+\frac{1}{n}-x\right) & \text{si } a \leq x \leq a+\frac{1}{n} \\ 0 & \text{si } a+\frac{1}{n} < x \end{cases}$$

(faire un dessin !)

On a alors $\|f_n\|_\infty = n$ et $\|f_n\|_1 = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ce qui empêche l'équivalence des deux normes, car la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ est bornée pour la norme $\|.\|_1$ mais pas pour la norme $\|.\|_\infty$.