

CH04 : Compléments d'algèbre linéaire

En MP2I, les notions d'algèbre linéaire ont été étudiées dans le cadre des \mathbb{K} -espaces vectoriels avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En fait, elles restent vraies si \mathbb{K} est un sous-corps quelconque de \mathbb{C} , comme \mathbb{Q} (ou $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, etc.), et la plupart des notions subsistent si \mathbb{K} est un corps quelconque (comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier par exemple).

Dans tout ce chapitre, \mathbb{K} désignera un sous-corps de \mathbb{C} , conformément au programme.

I Somme de sous-espaces vectoriels

On fixe un entier $p \geq 2$, et $(E, +, \cdot)$ un \mathbb{K} -espace vectoriel.

1) Somme

Définition 1 (Somme de sous-espaces vectoriels)

Si F_1, \dots, F_p sont des sous-espaces vectoriels de E , alors on appelle **somme de F_1, \dots, F_p** l'ensemble

$$\sum_{i=1}^p F_i = \{x \in E, \exists (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, x = x_1 + \dots + x_p\}.$$

C'est l'ensemble des éléments de E pouvant s'écrire comme somme d'éléments des F_i .

Propriété 2 (Propriétés de la somme)

Soit F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E . Alors :

(i) $\sum_{i=1}^p F_i$ est un sous-espace vectoriel de E , et $\sum_{i=1}^p F_i = \text{Vect} \left(\bigcup_{i=1}^p F_i \right)$.
C'est donc le plus petit sev de E contenant tous les F_i .

(ii) Si les F_i sont de dimensions finies, alors $\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$.

2) Somme directe et supplémentarité

Définition 3 (Somme directe de sous-espaces vectoriels)

Soit F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E . On dit que F_1, \dots, F_p sont en **somme directe** lorsque tout vecteur $x \in \sum_{i=1}^p F_i$ possède une unique décomposition $x = \sum_{i=1}^p x_i$ avec $x_i \in F_i$ pour tout i .

On note alors $\sum_{i=1}^p F_i = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.

Définition 4 (Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E)

Soit F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E . On dit que F_1, \dots, F_p sont **supplémentaires dans E** lorsqu'ils sont en somme directe et $\sum_{i=1}^p F_i = E$, c'est-à-dire $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.

Théorème 5 (Caractérisations d'une somme directe)

Soit F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E . Il y a équivalence entre :

(i) La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.

(ii) Pour tous vecteurs $x_1 \in F_1, \dots, x_p \in F_p$:

$$(x_1 + \dots + x_p = 0_E) \implies (x_1 = \dots = x_p = 0_E).$$

(iii) Pour tout $j \in [1, p-1]$:

$$\left(\sum_{i=1}^j F_i \right) \cap F_{j+1} = \{0_E\}.$$

Théorème 6 (Caractérisation d'une somme directe avec les dimensions)

Soit F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E , et \mathcal{B}_i une base de F_i pour tout i . Il y a équivalence entre :

(i) La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe.

(ii) La famille concaténée $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est libre.

(iii) La famille concaténée $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base de $\sum_{i=1}^p F_i$.

(iv) $\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$.

Vocabulaire

On dira dans ces conditions que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une **base adaptée à la somme directe** $\bigoplus_{i=1}^p F_i$.

Corollaire 7 (Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie)

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, soit F_1, \dots, F_p des sous-espaces vectoriels de E , et \mathcal{B}_i une base de F_i pour tout i . Il y a équivalence entre :

(i) F_1, \dots, F_p sont supplémentaires dans E .

(ii) La famille concaténée $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base de E .

(iii) La somme $\sum_{i=1}^p F_i$ est directe et $\sum_{i=1}^p \dim(F_i) = \dim(E)$.

3) Applications linéaires et sommes directes**Définition 8 (Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe)**

Soient E_1, \dots, E_r des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$.

Pour tout i , on note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$. La famille (p_1, \dots, p_r) est alors

appelée **famille de projecteurs associés à la somme directe** $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$.

Notation

Si $u : E \rightarrow F$ est une application linéaire et si E' est un sous-espace vectoriel de E , alors $u|_{E'} : E' \rightarrow F$ désigne la restriction de u à E' . On a $u|_{E'} \in \mathcal{L}(E', F)$.

Théorème 9 (Détermination d'une application linéaire sur une somme directe)

Soit E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et E_1, \dots, E_r des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^r E_i$. Soient des applications linéaires $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F), \dots, u_r \in \mathcal{L}(E_r, F)$.

Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u|_{E_i} = u_i$ pour tout $i \in [1, r]$.

II Opérations matricielles par blocs

On considère ici des **matrices définies "par blocs"**, c'est-à-dire de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

avec $A \in \mathcal{M}_{n_1, n_2}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n_1, n_4}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n_3, n_2}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n_3, n_4}(\mathbb{K})$, où $(n_1, n_2, n_3, n_4) \in (\mathbb{N}^*)^4$. Une telle matrice M est donc un élément de $\mathcal{M}_{n_1+n_3, n_2+n_4}(\mathbb{K})$.

Théorème 10 (Produit de matrices définies par blocs)

Soient $A, B, C, D, A', B', C', D'$ des matrices à coefficients dans \mathbb{K} telles que :

- le nombre de colonnes de A et C est égal au nombre de lignes de A' et B' ;
- le nombre de colonnes de B et D est égal au nombre de lignes de C' et D' .

Alors, on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

Définition 11 (Matrice triangulaire/diagonale par blocs)

Une matrice **triangulaire supérieure par blocs** est une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix},$$

où les A_i sont des matrices carrées (pas nécessairement de même taille).

On définit de même une matrice **triangulaire inférieure par blocs**.

Une matrice **diagonale par blocs** est une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix},$$

où les A_i sont des matrices carrées (pas nécessairement de même taille).

Théorème 12 (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs)

Si A et D sont deux matrices carrées (pas nécessairement de même taille), alors :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D).$$

Plus généralement : le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs (et a fortiori diagonale par blocs) est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

Définition 13 (Transvection par blocs)

On appelle **transvection par blocs** une opération transformant une matrice $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ en une matrice

$$\begin{pmatrix} A & B + \lambda A \end{pmatrix},$$

ou transformant une matrice $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ en une matrice $\begin{pmatrix} A \\ B + \lambda A \end{pmatrix}$

(A et B désignent deux matrices de même format et $\lambda \in \mathbb{K}$).

Propriété 14 (Invariance du déterminant par transvection par blocs)

Le déterminant d'une matrice carrée est invariant par transvection par blocs.

III \mathbb{K} -algèbres

Définition 15 (\mathbb{K} -algèbre)

Une \mathbb{K} -algèbre est un ensemble A muni de deux lois internes $+$: $A \times A \rightarrow A$, \times : $A \times A \rightarrow A$ et d'une loi externe \cdot : $\mathbb{K} \times A \rightarrow A$ qui vérifient :

- (i) $(A, +, \times)$ est un anneau ;
- (ii) $(A, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel ;
- (iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in A^2, (\lambda \cdot x)y = \lambda \cdot (xy) = x(\lambda \cdot y)$.

On dit que la \mathbb{K} -algèbre A est **commutative** si l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif, c'est-à-dire si la loi \times est commutative.

Définition 16 (Sous-algèbre)

Soit $(A, +, \times, \cdot)$ une \mathbb{K} -algèbre. Une **sous-algèbre de A** est une partie $B \subset A$ telle que :

- (i) $(B, +, \times)$ est un sous-anneau de $(A, +, \times)$;
- (ii) $(B, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(A, +, \cdot)$.

Propriété 17 (Caractérisation d'une sous-algèbre)

Soit $(A, +, \times, \cdot)$ une \mathbb{K} -algèbre et soit $B \subset A$. Alors, B est une sous-algèbre de A si et seulement si :

- (a) $1_A \in B$;
- (b) $\forall (x, y) \in B^2, xy \in B$;
- (c) $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times B \times B, \lambda x + y \in B$.

Définition 18 (Morphisme d'algèbres)

Soit $(A, +, \times, \cdot)$ et $(B, +, \times, \cdot)$ deux \mathbb{K} -algèbres. Un **morphisme d'algèbres de A dans B** est une application $\varphi : A \rightarrow B$ qui est à la fois un morphisme d'anneaux et une application linéaire.

Propriété 19 (Caractérisation d'un morphisme d'algèbres)

Soit $(A, +, \times, \cdot)$ et $(B, +, \times, \cdot)$ deux \mathbb{K} -algèbres. Alors, $\varphi : A \rightarrow B$ est un morphisme d'algèbres si et seulement si :

- (a) $\varphi(1_A) = 1_B$;
- (b) $\forall (x, y) \in A^2, \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$;
- (c) $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times A \times A, \varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$.