CH04 : Compléments d'algèbre linéaire

En MP2I, les notions d'algèbre linéaire ont été étudiées dans le cadre des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En fait, elles restent vraies si $\mathbb{K}$ est un sous-corps quelconque de $\mathbb{C}$, comme $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, etc.), et la plupart des notions subsistent si $\mathbb{K}$ est un corps quelconque (comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier par exemple).

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera un sous-corps de $\mathbb{C}$, conformément au programme.

I Somme de sous-espaces vectoriels

On fixe un entier $p \geq 2$, et $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1) Somme

Définition 1 (Somme de sous-espaces vectoriels)
Si $F_1, \cdots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de E, alors on appelle **somme de $F_1, \cdots, F_p$** *l'ensemble*

$$\sum_{i=1}^{p} F_i = \{x \in E,\ \exists (x_1, \cdots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x = x_1 + \cdots + x_p\}.$$

C'est l'ensemble des éléments de E pouvant s'écrire comme somme d'éléments des F_i.

Propriété 2 (Propriétés de la somme)
Soit $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. Alors :

(i) $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ *est un sous-espace vectoriel de E, et* $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i = Vect\left(\bigcup\limits_{i=1}^{p} F_i\right)$.
C'est donc le plus petit sev de E contenant tous les F_i.

(ii) Si les F_i sont de dimensions finies, alors $\dim\left(\sum\limits_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

2) Somme directe et supplémentarité

Définition 3 (Somme directe de sous-espaces vectoriels)
Soit $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que $F_1, \cdots, F_p$ sont en **somme directe** *lorsque tout vecteur $x \in \sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ possède une unique décomposition $x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i$ avec $x_i \in F_i$ pour tout i.*
On note alors $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$.

Définition 4 (Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E)
Soit $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. On dit que $F_1, \cdots, F_p$ sont **supplémentaires dans E** *lorsqu'ils sont en somme directe et $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i = E$, c'est-à-dire $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$.*

Théorème 5 (Caractérisations d'une somme directe)
Soit $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. Il y a équivalence entre :

(i) *La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.*

(ii) *Pour tous vecteurs $x_1 \in F_1, \cdots, x_p \in F_p$:*

$$(x_1 + \cdots + x_p = 0_E) \implies (x_1 = \cdots = x_p = 0_E).$$

(iii) *Pour tout $j \in [\![1, p-1]\!]$:*

$$\left(\sum_{i=1}^{j} F_i\right) \cap F_{j+1} = \{0_E\}.$$

Théorème 6 (Cararactérisation d'une somme directe avec les dimensions)
Soit $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E, et $\mathcal{B}_i$ une base de F_i pour tout i. Il y a équivalence entre :

(i) *La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.*

(ii) *La famille concaténée $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ est libre.*

(iii) *La famille concaténée $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ est une base de $\sum_{i=1}^{p} F_i$.*

(iv) $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

Vocabulaire
On dira dans ces conditions que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ est une **base adaptée à la somme directe $\boldsymbol{\bigoplus_{i=1}^{p} F_i}$**.

Corollaire 7 (Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E. et $\mathcal{B}_i$ une base de F_i pour tout i. Il y a équivalence entre :

(i) *$F_1, \cdots, F_p$ sont supplémentaires dans E.*

(ii) *La famille concaténée $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ est une base de E.*

(iii) *La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe et $\sum_{i=1}^{p} \dim(F_i) = \dim(E)$.*

3) Applications linéaires et sommes directes

Définition 8 (Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe)
Soient $E_1, \cdots, E_r$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$.
Pour tout i, on note p_i le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$. La famille $(p_1, \cdots, p_r)$ est alors appelée **famille de projecteurs associés à la somme directe $\boldsymbol{E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i}$**.

Notation
Si $u : E \to F$ est une application linéaire et si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $u_{|E'} : E' \to F$ désigne la restriction de u à E'. On a $u_{|E'} \in \mathcal{L}(E', F)$.

Théorème 9 (Détermination d'une application linéaire sur une somme directe)
Soit E, F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $E_1, \cdots, E_r$ *des sous-espaces vectoriels de* E *tels que* $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$*. Soient des applications linéaires* $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F), \cdots, u_r \in \mathcal{L}(E_r, F)$*.*
Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ *telle que* $u_{|E_i} = u_i$ *pour tout* $i \in [\![1, r]\!]$*.*

II Opérations matricielles par blocs

On considère ici des **matrices définies "par blocs"**, c'est-à-dire de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

avec $A \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n_1,n_4}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n_3,n_2}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n_3,n_4}(\mathbb{K})$, où $(n_1, n_2, n_3, n_4) \in (\mathbb{N}^*)^4$. Une telle matrice M est donc un élément de $\mathcal{M}_{n_1+n_3,n_2+n_4}(\mathbb{K})$.

Théorème 10 (Produit de matrices définies par blocs)
Soient $A, B, C, D, A', B', C', D'$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que :

- *le nombre de colonnes de A et C est égal au nombre de lignes de A' et B' ;*
- *le nombre de colonnes de B et D est égal au nombre de lignes de C' et D'.*

Alors, on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

Définition 11 (Matrice triangulaire/diagonale par blocs)
Une matrice **triangulaire supérieure par blocs** *est une matrice de la forme :*

$$\begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix},$$

où les A_i sont des matrices carrées (pas nécessairement de même taille).
On définit de même une matrice **triangulaire inférieure par blocs**.
Une matrice **diagonale par blocs** *est une matrice de la forme :*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix},$$

où les A_i sont des matrices carrées (pas nécessairement de même taille).

Théorème 12 (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs)
Si A et D sont deux matrices carrées (pas nécessairement de même taille), alors :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

Plus généralement : le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs (et a fortiori diagonale par blocs) est le produit des déterminants des blocs diagonaux.

Définition 13 (Transvection par blocs)
On appelle **transvection par blocs** *une opération transformant une matrice $(A \;\; B)$ en une matrice $(A \;\; B + \lambda A)$, ou transformant une matrice $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ en une matrice $\begin{pmatrix} A \\ B + \lambda A \end{pmatrix}$*
(A et B désignent deux matrices de même format et $\lambda \in \mathbb{K}$).

Propriété 14 (Invariance du déterminant par transvection par blocs)
Le déterminant d'une matrice carrée est invariant par transvection par blocs.

III $\mathbb{K}$-algèbres

Définition 15 ($\mathbb{K}$-algèbre)
Une **$\mathbb{K}$-algèbre** *est un ensemble A muni de deux lois internes $+ : A \times A \to A$, $\times : A \times A \to A$ et d'une loi externe $. : \mathbb{K} \times A \to A$ qui vérifient :*

(i) $(A, +, \times)$ *est un anneau ;*

(ii) $(A, +, .)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;*

(iii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x, y) \in A^2$, $(\lambda.x)y = \lambda.(xy) = x(\lambda.y)$.

On dit que la $\mathbb{K}$-algèbre A est **commutative** *si l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif, c'est-à-dire si la loi $\times$ est commutative.*

Définition 16 (Sous-algèbre)
Soit $(A, +, \times, .)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Une **sous-algèbre de** *A est une partie $B \subset A$ telle que :*

(i) $(B, +, \times)$ *est un sous-anneau de* $(A, +, \times)$ *;*

(ii) $(B, +, .)$ *est un sous-espace vectoriel de* $(A, +, .)$.

Propriété 17 (Caractérisation d'une sous-algèbre)
Soit $(A, +, \times, .)$ une $\mathbb{K}$-algèbre et soit $B \subset A$. Alors, B est une sous-algèbre de A si et seulement si :

(a) $1_A \in B$ *;*

(b) $\forall (x, y) \in B^2$, $xy \in B$ *;*

(c) $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times B \times B$, $\lambda x + y \in B$.

Définition 18 (Morphisme d'algèbres)
Soit $(A, +, \times, .)$ et $(B, +, \times, .)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres. Un **morphisme d'algèbres** *de A dans B est une application $\varphi : A \to B$ qui est à la fois un morphisme d'anneaux et une application linéaire.*

Propriété 19 (Caractérisation d'un morphisme d'algèbres)
Soit $(A, +, \times, .)$ et $(B, +, \times, .)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres. Alors, $\varphi : A \to B$ est un morphisme d'algèbres si et seulement si :

(a) $\varphi(1_A) = 1_B$ *;*

(b) $\forall (x, y) \in A^2$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ *;*

(c) $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times A \times A$, $\varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$.