# CH04 : Compléments d'algèbre linéaire

# Table des matières

En MP2I, les notions d'algèbre linéaire ont été étudiées dans le cadre des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En fait, elles restent vraies si $\mathbb{K}$ est un sous-corps quelconque de $\mathbb{C}$, comme $\mathbb{Q}$ (ou $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, etc.), et la plupart des notions subsistent si $\mathbb{K}$ est un corps quelconque (comme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p$ premier par exemple).

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera un sous-corps de $\mathbb{C}$, conformément au programme.

# I Somme de sous-espaces vectoriels

On fixe un entier $p \geq 2$, et $(E, +, .)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

## 1) Somme

**ATTENTION !**
On rappelle que l'intersection de sous-espaces vectoriels de $E$ est un sous-espace vectoriel de $E$, mais pas la réunion ! C'est pourquoi on s'intéresse à l'opération suivante, qui permet de rassembler des sev pour en créer d'autres.

**Définition 1 (Somme de sous-espaces vectoriels)**
*Si $F_1, \cdots, F_p$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$, alors on appelle* **somme de $F_1, \cdots, F_p$** *l'ensemble*

$$\sum_{i=1}^{p} F_i = \{x \in E,\ \exists (x_1, \cdots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x = x_1 + \cdots + x_p\}.$$

*C'est l'ensemble des éléments de $E$ pouvant s'écrire comme somme d'éléments des $F_i$.*

**Remarque**

- *La somme de sous-espaces vectoriels est bien entendu associative et commutative (puisque la somme de vecteurs de $E$ l'est).*
- *Si $p = 2$, alors $F_1 + F_2$ est l'ensemble des vecteurs de $E$ s'écrivant sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F_1$ et $x_2 \in F_2$.*

**Propriété 2 (Propriétés de la somme)**
*Soit $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de $E$. Alors :*

*(i) $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$, et $\sum_{i=1}^{p} F_i = Vect\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right)$.*
*C'est donc le plus petit sev de $E$ contenant tous les $F_i$.*

*(ii) Si les $F_i$ sont de dimensions finies, alors $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.*

**Preuve**

(i)
- $0_E = 0_E + \cdots + 0_E$ avec $0_E \in F_i$ pour tout $i$, donc $0_E \in \sum_{i=1}^{p} F_i$.

  Si $x$ et $y$ sont dans $\sum_{i=1}^{p} F_i$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $x = x_1 + \cdots + x_p$ et $y = y_1 + \cdots + y_p$ avec les $x_i, y_i \in F_i$ pour tout $i$, donc puisque chaque $F_i$ est stable par combinaison linéaire, on a :

$$\lambda x + y = \underbrace{(\lambda x_1 + y_1)}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{(\lambda x_p + y_p)}_{\in F_p},$$

  donc $\lambda x + y \in \sum_{i=1}^{p} F_i$. Ceci montre que $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

- L'inclusion $\sum_{i=1}^{p} F_i \subset Vect\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right)$ est évidente car toute somme du type $x_1 + \cdots + x_p$ avec $x_i \in F_i$ est une combinaison linéaire de $(x_1, \cdots, x_p)$, et tous les $x_i$ sont dans la partie $\bigcup_{i=1}^{p} F_i$.

Réciproquement toute combinaison linéaire $x = \sum_{i \in I} \lambda_i u_i$ (avec $I$ fini) de vecteurs de $\bigcup_{k=1}^{p} F_k$, peut s'écrire, en réordonnant les termes :

$$x = \sum_{k=1}^{p} \left( \sum_{i \in I_k} \lambda_i u_i \right),$$

en posant par exemple

$$\forall k \in [\![1,p]\!], \qquad I_k = \{i \in I,\ u_i \in F_k \setminus (F_1 \cup \cdots \cup F_{k-1})\}$$

(on a bien la réunion disjointe $I = I_1 \cup \cdots \cup I_p$).
Vu que les $F_k$ sont stables par combinaison linéaire, on a donc $\sum_{i \in I_k} \lambda_i u_i \in F_k$ pour tout $k$, ce qui montre que $x \in \sum_{k=1}^{p} F_k$, et donc l'inclusion $Vect\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right) \subset \sum_{i=1}^{p} F_i$.

- De façon évidente, le sev $Vect\left(\bigcup_{i=1}^{p} F_i\right)$ contient tous les $F_i$, donc $\sum_{i=1}^{p} F_i$ contient tous les $F_i$.
- Si $G$ est un sev de $E$ contenant tous les $F_i$, alors étant stable par somme, $G$ contient $\sum_{i=1}^{p} F_i$, ce qui montre le caractère minimal annoncé.

(ii) Considérons une base $\mathcal{B}_i$ de chaque sev $F_i$, pour $i \in [\![1,p]\!]$. Alors, la famille $\mathcal{G} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ (dans cet ordre mais on aurait pu faire autrement) est clairement une famille génératrice de l'espace somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ (chaque $x \in F_1 + \cdots + F_p$ s'écrit $x_1 + \cdots + x_p$, avec chaque $x_i$ s'écrivant comme combinaison linéaire de la famille $\mathcal{B}_i$). D'où

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq Card(\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{p} Card(\mathcal{B}_i) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i).$$

(rappelons que la dimension d'un espace vectoriel est le cardinal de toutes ses bases, et que les bases sont les familles libres de cardinal maximal, ou encore les familles génératrices de cardinal minimal).

**Remarque**
*Rappelons que dans une base, l'ordre des éléments compte, c'est une liste (et non pas une partie). Dans la concaténation de listes, on conserve les copies, c'est pourquoi on a ici $Card(\mathcal{G}) = \sum_{i=1}^{p} Card(\mathcal{B}_i)$, même si deux bases $\mathcal{B}_i$ différentes ont des vecteurs en commun.*

**ATTENTION !**
La décomposition en somme d'un vecteur $x \in \sum_{i=1}^{p} F_i$ n'est pas nécessairement unique, ce qui peut poser problème. C'est pourquoi on introduit la notion de somme directe.

## 2) Somme directe et supplémentarité

**Définition 3 (Somme directe de sous-espaces vectoriels)**
*Soit $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de $E$. On dit que $F_1, \cdots, F_p$ sont en* **somme directe** *lorsque tout vecteur $x \in \sum_{i=1}^{p} F_i$ possède une unique décomposition $x = \sum_{i=1}^{p} x_i$ avec $x_i \in F_i$ pour tout $i$.*
*On note alors $\sum_{i=1}^{p} F_i = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.*

**ATTENTION !**
La notation $\bigoplus$ ne peut s'employer que pour une somme **directe**.

**Définition 4 (Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $E$)**
*Soit $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de $E$. On dit que $F_1, \cdots, F_p$ sont* **supplémentaires dans $\boldsymbol{E}$** *lorsqu'ils sont en somme directe et $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i = E$, c'est-à-dire $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$.*

**ATTENTION !**
Bien saisir la nuance :

- "$F_1, \cdots, F_p$ en somme directe" signifie que tout vecteur du sous-espace somme $F_1 + \cdots + F_p$ possède une unique décomposition.
- "$F_1, \cdots, F_p$ supplémentaires dans $E$" signifie que tout vecteur **de $\boldsymbol{E}$** possède une unique décomposition en somme : cette propriété est bien plus forte.

**Théorème 5 (Caractérisations d'une somme directe)**
*Soit $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de $E$. Il y a équivalence entre :*

$(i)$ *La somme $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est directe.*

$(ii)$ *Pour tous vecteurs $x_1 \in F_1, \cdots, x_p \in F_p$ :*

$$(x_1 + \cdots + x_p = 0_E) \implies (x_1 = \cdots = x_p = 0_E).$$

$(iii)$ *Pour tout $j \in [\![1, p-1]\!]$ :*

$$\left(\sum_{i=1}^{j} F_i\right) \cap F_{j+1} = \{0_E\}.$$

**Preuve**

$\boxed{(i) \implies (ii)}$ Evident : si la somme $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est directe, alors par unicité de la décomposition en somme :

$$(x_1 + \cdots + x_p = 0_E) \implies (\underbrace{x_1}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{x_p}_{\in F_p} = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{0_E}_{\in F_p}) \implies (x_1 = \cdots = x_p = 0_E).$$

$\boxed{(ii) \implies (iii)}$ Soit $j \in [\![1, p-1]\!]$. Si $x \in \left(\sum\limits_{i=1}^{j} F_i\right) \cap F_{j+1}$, alors il existe $(x_1, \cdots, x_j) \in F_1 \times \cdots \times F_j$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_j$, donc on a

$$\underbrace{x_1}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{x_j}_{\in F_j} - \underbrace{x}_{\in F_{j+1}} + \underbrace{0_E}_{\in F_{j+2}} + \cdots + \underbrace{0_E}_{\in F_p} = 0_E,$$

ce qui conduit par hypothèse à $x = 0_E$. Ceci montre que $\left(\sum\limits_{i=1}^{j} F_i\right) \cap F_{j+1} \subset \{0_E\}$ et l'inclusion réciproque est automatique, car tout sev contient $0_E$.

$\boxed{(iii) \implies (i)}$ Supposons que

$$x_1 + \cdots + x_p = y_1 + \cdots + y_p,$$

avec les $x_i, y_i \in F_i$. Alors :

$$\underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{(x_{p-1} - y_{p-1})}_{\in F_{p-1}} = \underbrace{y_p - x_p}_{\in F_p},$$

donc $y_p - x_p \in \left(\sum\limits_{i=1}^{p-1} F_i\right) \cap F_p = \{0_E\}$ (par hypothèse), d'où $x_p = y_p$. Il reste donc

$$x_1 + \cdots + x_{p-1} = y_1 + \cdots + y_{p-1},$$

et en itérant (on peut car l'hypothèse est "à tous les étages"), on obtient successivement que $x_{p-1} = y_{p-1}, \cdots, x_1 = y_1$, ce qui montre que la somme $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

**Remarque**

*Si $p = 2$, on retrouve la caractérisation connue : $F_1$ et $F_2$ sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.*

**ATTENTION !**

Si $p \geq 3$, il ne suffit pas d'avoir $F_i \cap F_j = \{0_E\}$ pour tout $i \neq j$ pour que la somme soit directe. Par exemple, dans $E = \mathbb{R}^2$, les trois droites $F_1 = Vect(1, 0)$, $F_2 = Vect(0, 1)$ et $F_3 = Vect(1, 1)$ sont d'intersections nulles deux à deux, mais elles ne sont pas en somme directe. Deux arguments pour le justifier :

- Décomposition non triviale du vecteur nul $(0, 0)$ :
$$(0,0) = \underbrace{(1,0)}_{\in F_1} + \underbrace{(0,1)}_{\in F_2} + \underbrace{(-1,-1)}_{\in F_3},$$
donc la caractérisation $(ii)$ du théorème précédent est en défaut.
- Problème avec les dimensions : $\dim(F_1 + F_2 + F_3) \leq \dim(\mathbb{R}^2) = 2$, alors que $\dim(F_1) + \dim(F_2) + \dim(F_3) = 3$, donc la caractérisation $(iv)$ du théorème suivant est en défaut.

**Théorème 6 (Cararactérisation d'une somme directe avec les dimensions)**

*Soit $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie de $E$, et $\mathcal{B}_i$ une base de $F_i$ pour tout $i$. Il y a équivalence entre :*

$(i)$ *La somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.*

$(ii)$ *La famille concaténée $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ est libre.*

$(iii)$ *La famille concaténée $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ est une base de $\sum_{i=1}^{p} F_i$.*

$(iv)$ $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

**Vocabulaire**

On dira dans ces conditions que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ est une **base adaptée à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$**.

**Preuve**

$\boxed{(i) \implies (ii)}$ Une combinaison linéaire quelconque de la famille $\mathcal{B}$ peut s'écrire, en groupant les termes issus de la même base :
$$\sum_{k \in I_1} \lambda_k e_k + \cdots + \sum_{k \in I_p} \lambda_k e_k,$$
où $I_1, \cdots, I_p$ sont des parties disjointes de $\mathbb{N}$ telles que pour tout $i$, $\mathcal{B}_i = (e_k)_{k \in I_i}$ et les $\lambda_k \in \mathbb{K}$.
Si une telle combinaison linéaire est nulle, alors puisque chaque terme $\sum_{k \in I_i} \lambda_k e_k$ est dans $F_i$ et que les $F_i$ sont supposés en somme directe, on en déduit (par l'unicité de la décomposition de $0_E$) que
$$\forall i \in [\![1, p]\!], \qquad \sum_{k \in I_i} \lambda_k e_k = 0,$$
et donc tous les $\lambda_k$ sont nuls puisque $\mathcal{B}_i$ est libre. D'où $\mathcal{B}$ est libre.

$\boxed{(ii) \implies (i)}$ Si $x_1 + \cdots + x_p = 0_E$ avec les $x_i \in F_i$, alors chaque $x_i$ s'écrit comme combinaison linéaire de la base $\mathcal{B}_i$, donc on peut réécrire
$$\sum_{k \in I_1} \lambda_k e_k + \cdots + \sum_{k \in I_p} \lambda_k e_k = 0,$$
avec les mêmes notations qu'auparavant.
On a donc affaire à une combinaison linéaire nulle de la famille $\mathcal{B}$, qui est libre, donc tous les $\lambda_k$ sont nuls, ce qui entraîne que chaque $x_i$ est nul, et donc la somme $\sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe.

$\boxed{(ii) \iff (iii)}$ Résulte du fait que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ est toujours génératrice de $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ (cf. preuve de la prop. 2).

$\boxed{(iii) \iff (iv)}$ Puisque $\mathcal{B}$ est déjà génératrice de $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$, on a

$$\mathcal{B} \text{ base de } \sum_{i=1}^{p} F_i \iff Card(\mathcal{B}) = \dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \iff \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i) = \dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right).$$

**Corollaire 7 (Caractérisation de la supplémentarité en dimension finie)**
*Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, soit $F_1, \cdots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de $E$. et $\mathcal{B}_i$ une base de $F_i$ pour tout $i$. Il y a équivalence entre :*

$(i)$ *$F_1, \cdots, F_p$ sont supplémentaires dans $E$.*

$(ii)$ *La famille concaténée $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ est une base de $E$.*

$(iii)$ *La somme $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est directe et $\sum\limits_{i=1}^{p} \dim(F_i) = \dim(E)$.*

**Preuve (non traitée en classe)**

$\boxed{(i) \implies (ii)}$ Si $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i = E$, alors d'après la proposition précédente, $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p)$ est une base de $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$, donc de $E$.

$\boxed{(ii) \implies (iii)}$ Par hypothèse, $\mathcal{B}$ est libre donc la somme $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est directe par la proposition précédente et $\mathcal{B}$ est une base de $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$. Mais $\mathcal{B}$ est aussi une base de $E$, donc $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i$ et $\dim(E) = \dim\left(\bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

$\boxed{(iii) \implies (i)}$ Puisque la somme $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ est supposée directe, on a $\dim\left(\sum\limits_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{p} \dim(F_i) = \dim(E)$, et donc le sev $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i$ a même dimension que $E$, d'où $\sum\limits_{i=1}^{p} F_i = E$.

Finalement, on a bien $\bigoplus\limits_{i=1}^{p} F_i = E$.

**ATTENTION !**

Toute seule, l'égalité $\sum\limits_{i=1}^{p} \dim(F_i) = \dim(E)$ ne donne rien (ni somme directe, ni supplémentarité) !

## 3) Applications linéaires et sommes directes

**Définition 8 (Projecteurs associés à une décomposition de $E$ en somme directe)**
*Soient $E_1, \cdots, E_r$ des sous-espaces vectoriels de $E$ tels que $E = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_i$.*
*Pour tout $i$, on note $p_i$ le projecteur sur $E_i$ parallèlement à $\bigoplus\limits_{j \neq i} E_j$. La famille $(p_1, \cdots, p_r)$ est alors appelée* **famille de projecteurs associés à la somme directe $\boldsymbol{E = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_i}$.**

**Remarque**
*Par définition, on a pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ :*

$$p_i : \left\{ \begin{array}{ccc} E = \bigoplus\limits_{i=1}^{r} E_i & \longrightarrow & E \\ x = x_1 + \cdots + x_r & \longmapsto & x_i \end{array} \right. ,$$

*donc les propriétés suivantes sont immédiates :*

- *pour tout* $i \in [\![1, r]\!]$, $p_i \in \mathcal{L}(E)$, $Im(p_i) = E_i$ *et* $Ker(p_i) = \bigoplus_{j \neq i} E_j$ ;
- $\sum_{i=1}^{r} p_i = Id_E$ ;
- *pour tout* $i \neq j$, $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

**Notation**
Si $u : E \to F$ est une application linéaire et si $E'$ est un sous-espace vectoriel de $E$, alors $u_{|E'} : E' \to F$ désigne la restriction de $u$ à $E'$. On a $u_{|E'} \in \mathcal{L}(E', F)$.

**Théorème 9 (Détermination d'une application linéaire sur une somme directe)**
*Soit* $E, F$ *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels et* $E_1, \cdots, E_r$ *des sous-espaces vectoriels de* $E$ *tels que* $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$. *Soient des applications linéaires* $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F), \cdots, u_r \in \mathcal{L}(E_r, F)$.
*Alors il existe une unique application linéaire* $u \in \mathcal{L}(E, F)$ *telle que* $u_{|E_i} = u_i$ *pour tout* $i \in [\![1, r]\!]$.

**Preuve**

- **Unicité** : si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ convient, alors pour tout $x \in E$ :

$$u(x) = u\left(\sum_{i=1}^{r} p_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{r} u(\underbrace{p_i(x)}_{\in E_i}) = \sum_{i=1}^{r} u_i(p_i(x)),$$

  où $(p_1, \cdots, p_r)$ sont les projecteurs associés à la somme directe $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$.
  On a donc nécessairement $u = \sum_{i=1}^{r} (u_i \circ p_i)$, d'où l'unicité de $u$ sous réserve d'existence.
- **Existence** : l'application $u = \sum_{i=1}^{r} (u_i \circ p_i)$ convient. Elle est linéaire de $E$ dans $F$ par opérations et vérifie les conditions voulues car pour tout $j \in [\![1, r]\!]$ et pour tout $x \in E_j$ :

$$u_{|E_j}(x) = u(x) = \sum_{i=1}^{r} (u_i( \underbrace{p_i(x)}_{= 0_E \ si \ i \neq j} ) = u_j(p_j(x)) = u_j(x).$$

**Rappel (Sur les hyperplans)**
Lorsque $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle **hyperplan** de $E$ tout sous-espace vectoriel $H$ de codimension 1, c'est-à-dire qui possède un supplémentaire de dimension 1 (donc une droite supplémentaire).

- Lorsque $E$ est de dimension finie, $H$ est un hyperplan de $E$ ssi $\dim(H) = \dim(E) - 1$.
- Si $H$ est un hyperplan de $E$, alors pour tout $\alpha \in E \setminus H$, la droite $D = Vect(\alpha)$ est un supplémentaire de $H$ dans $E$.
  En effet, on a
  * D'une part : $H \cap D = \{0_E\}$, car si $x \in H \cap D$, alors il existe $\beta \in \mathbb{K}$ tel que $x = \beta\alpha \in H$, et si $\beta \neq 0$, alors $\alpha = \frac{1}{\beta} x \in H$, ce qui est contradictoire, donc $\beta = 0$ et par suite $x = 0_E$.
  * D'autre part : $E = H + D$, car étant un hyperplan, $H$ possède déjà une droite supplémentaire $\Delta = Vect(e)$ (avec $e \neq 0_E$). Donc tout vecteur $x \in E$ se décompose sous la forme $x = x_H + \lambda e$ avec $x_H \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, ainsi que le vecteur $\alpha$ :

$$\exists (\alpha_H, \mu) \in H \times \mathbb{K}, \qquad \alpha = \alpha_H + \mu e.$$

    Or, $\mu \neq 0$ (sinon $\alpha \in H$ ce qui est exclu), on peut donc réécrire, pour tout $x \in E$ :

$$x = x_H + \frac{\lambda}{\mu}(\alpha - \alpha_H) = \left(x_H - \frac{\lambda}{\mu}\alpha_H\right) + \frac{\lambda}{\mu}\alpha \in H + D,$$

    d'où $E \subset H + D$ et l'inclusion réciproque est triviale.

**Exemple (Tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire)**
Si $H$ est un hyperplan de $E$ et si $\alpha \in E \setminus H$, alors il existe une unique forme linéaire $\varphi : E \to \mathbb{K}$ telle que $Ker(\varphi) = H$ et $\varphi(\alpha) = 1$.
En effet :

- les conditions $\varphi_{|H} = 0_{\mathcal{L}(H,\mathbb{K})}$ et $\varphi(\alpha) = 1$ déterminent $\varphi$ sur $H$ et sur $D = Vect(\alpha)$ (puisque $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(1) = \lambda\alpha$ par linéarité) ;
- on a $H \oplus D = E$ (d'après le rappel précédent) ;

donc on peut utiliser le théorème 9.

# II Opérations matricielles par blocs

On considère ici des **matrices définies "par blocs"**, c'est-à-dire de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

avec $A \in \mathcal{M}_{n_1,n_2}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n_1,n_4}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n_3,n_2}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{n_3,n_4}(\mathbb{K})$, où $(n_1, n_2, n_3, n_4) \in (\mathbb{N}^*)^4$. Une telle matrice $M$ est donc un élément de $\mathcal{M}_{n_1+n_3,n_2+n_4}(\mathbb{K})$.

**Exemple**

$$M = \left(\begin{array}{cc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ avec } (n_1, n_2, n_3, n_4) = (1, 2, 3, 4).$$

**Exemple (Une matrice diagonale par blocs triangulaires)**

$$M = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ici, $(n_1, n_2, n_3, n_4) = (2, 2, 3, 3)$.

**Théorème 10 (Produit de matrices définies par blocs)**
*Soient $A, B, C, D, A', B', C', D'$ des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que :*

- *le nombre de colonnes de $A$ et $C$ est égal au nombre de lignes de $A'$ et $B'$ ;*
- *le nombre de colonnes de $B$ et $D$ est égal au nombre de lignes de $C'$ et $D'$.*

*Alors, on a*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}.$$

**Exemple**
Si $A, A'$ sont carrées de même taille, ainsi que $D, D'$, alors le produit par blocs est automatiquement défini. Par exemple : si $a, a' \in \mathbb{K}$ et $D, D' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} a' & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & D' & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} aa' & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & DD' & \\ 0 & & & \end{array}\right).$$

**Preuve (non traitée en classe)**
Notons $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ et $M'' = MM'$ (le produit est compatible par hypothèse car la matrice $M$ possède autant de colonnes que $M'$ n'a de lignes). Calculons les coefficients de $M''$. Avec les notations précédentes $(n_1, n_2, n_3, n_4)$, et en nommant $n_5$ le nombre de colonnes de $A'$ et $C'$ et $n_6$ le nombre de colonnes de $B', D'$, on a pour $(i, j) \in [\![1, n_1 + n_3]\!] \times [\![1, n_5 + n_6]\!]$ :

$$M''[i, j] = \sum_{k=1}^{n_2+n_4} M[i, k]M'[k, j].$$

Si $(i, j) \in [\![1, n_1]\!] \times [\![1, n_5]\!]$, alors

$$M''[i, j] = \sum_{k=1}^{n_2} M[i, k]M'[k, j] + \sum_{k=n_2+1}^{n_2+n_4} M[i, k]M'[k, j]$$

$$= \sum_{k=1}^{n_2} A[i,k]A'[k,j] + \sum_{k=1}^{n_4} B[i,k]C'[k,j] = (AA')[i,j] + (BC')[i,j] = (AA' + BC')[i,j],$$

et on procède de même pour les 3 autres secteurs de la matrice $M''$.

**Remarque**
*On obtient facilement :*

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix},$$

*où le* $^\top$ *désigne la transposée.*

**Définition 11 (Matrice triangulaire/diagonale par blocs)**
*Une matrice* **triangulaire supérieure par blocs** *est une matrice de la forme :*

$$\begin{pmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix},$$

*où les $A_i$ sont des matrices carrées (pas nécessairement de même taille).*
*On définit de même une matrice* **triangulaire inférieure par blocs***.*
*Une matrice* **diagonale par blocs** *est une matrice de la forme :*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_r \end{pmatrix},$$

*où les $A_i$ sont des matrices carrées (pas nécessairement de même taille).*

**Théorème 12 (Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs)**
*Si $A$ et $D$ sont deux matrices carrées (pas nécessairement de même taille), alors :*

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D).$$

*Plus généralement : le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs (et a fortiori diagonale par blocs) est le produit des déterminants des blocs diagonaux.*

**Preuve**
L'idée est de décomposer la matrice à l'aide d'un produit par blocs :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix},$$

où $I_{n_1}$ (resp. $I_{n_2}$) est la matrice identité de même format que $A$ (resp. $D$). Par multiplicativité du déterminant, on en déduit :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix},$$

et ces deux déterminants se calculent simplement en développant par rapport à des rangées adéquates :

- en développant successivement par rapport aux lignes $L_1, \cdots, L_{n_1}$, on obtient $\det \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(D)$

- en développant successivement par rapport aux lignes $L_{n_1+n_2}, \cdots, L_{n_1+1}$, on obtient $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} = \det(A)$.

D'où le résultat voulu.
La généralisation se fait par récurrence forte immédiate sur la taille de la matrice.

**ATTENTION !**

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \neq \det(A)\det(D) - \det(C)\det(B),$$

même si les quatre blocs $A, B, C, D$ sont carrés de même taille !

**Définition 13 (Transvection par blocs)**
*On appelle* **transvection par blocs** *une opération transformant une matrice* $(A \;\; B)$ *en une matrice* $(A \;\; B+\lambda A)$*, ou transformant une matrice* $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ *en une matrice* $\begin{pmatrix} A \\ B+\lambda A \end{pmatrix}$
*($A$ et $B$ désignent deux matrices de même format et $\lambda \in \mathbb{K}$).*

**Propriété 14 (Invariance du déterminant par transvection par blocs)**
*Le déterminant d'une matrice carrée est invariant par transvection par blocs.*

**Preuve**
La transvection par blocs est une composée de transvections "classiques" (par lignes ou colonnes), qui laissent invariant le déterminant (voir cours MP2I).
Par exemple, dans la matrice $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ avec $A, B \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{K})$, la transvection $B \longleftarrow B + \lambda A$ revient à appliquer successivement les opérations suivantes sur les colonnes :

$$C_{n+1} \longleftarrow C_{n+1} + \lambda C_1 \quad , \quad \cdots \quad , \quad C_{2n} \longleftarrow C_{2n} + \lambda C_n.$$

De même pour l'autre type de transvection en opérant sur les lignes.

# III $\mathbb{K}$-algèbres

**Définition 15 ($\mathbb{K}$-algèbre)**
*Une* **$\mathbb{K}$-algèbre** *est un ensemble $A$ muni de deux lois internes $+ : A \times A \to A$, $\times : A \times A \to A$ et d'une loi externe $. : \mathbb{K} \times A \to A$ qui vérifient :*

*(i)* $(A, +, \times)$ *est un anneau ;*

*(ii)* $(A, +, .)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ;*

*(iii)* $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall (x, y) \in A^2$, $(\lambda.x)y = \lambda.(xy) = x(\lambda.y)$.

*On dit que la $\mathbb{K}$-algèbre $A$ est* **commutative** *si l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif, c'est-à-dire si la loi $\times$ est commutative.*

**Exemple (Les exemples fondamentaux)**

- $(\mathbb{K}[X], +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
  Ici, la troisième loi . est le produit d'un polynôme par un scalaire (coefficient par coefficient).
- Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$, $(\mathcal{L}(E), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
  Ici, la troisième loi . est définie par $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda.u : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda u(x) \end{array} \right.$ .
- Pour tout entier $n \geq 1$, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
  Ici, la troisième loi . est le produit d'une matrice carrée par un scalaire (coefficient par coefficient).
- Pour tout ensemble $X$, $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.
  Ici, la troisième loi . est définie par $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$, $\lambda.f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array} \right.$ .

**Définition 16 (Sous-algèbre)**
*Soit $(A, +, \times, .)$ une $\mathbb{K}$-algèbre. Une* **sous-algèbre de** *$A$ est une partie $B \subset A$ telle que :*

*(i)* $(B, +, \times)$ *est un sous-anneau de* $(A, +, \times)$ *;*

*(ii)* $(B, +, .)$ *est un sous-espace vectoriel de* $(A, +, .)$.

**Remarque**
*Toute sous-algèbre $B$ est elle-même une $\mathbb{K}$-algèbre (pour les lois induites).*

**Propriété 17 (Caractérisation d'une sous-algèbre)**
*Soit $(A, +, \times, .)$ une $\mathbb{K}$-algèbre et soit $B \subset A$. Alors, $B$ est une sous-algèbre de $A$ si et seulement si :*

*(a)* $1_A \in B$ *;*

*(b)* $\forall (x, y) \in B^2$, $xy \in B$ *;*

*(c)* $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times B \times B$, $\lambda x + y \in B$.

**Preuve (non traitée en classe)**
Tout d'abord, $(i)$ entraîne $(a)$ et $(b)$, et $(ii)$ entraîne $(c)$.
Réciproquement, $(a)$ assure que $B$ est non vide, et $(c)$ assure que $B$ est stable par combinaison linéaire, donc $(a)+(c)$ entraîne que $B$ est un sous-espace vectoriel de $A$. En particulier, cela entraîne que $(B, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ contenant $1_A$, donc en ajoutant la condition $(b)$ on obtient que $B$ est un sous-anneau de $A$.

**Définition 18 (Morphisme d'algèbres)**
*Soit $(A, +, \times, .)$ et $(B, +, \times, .)$ deux $\mathbb{K}$-algèbres. Un* **morphisme d'algèbres** *de $A$ dans $B$ est une application $\varphi : A \to B$ qui est à la fois un morphisme d'anneaux et une application linéaire.*

**Propriété 19 (Caractérisation d'un morphisme d'algèbres)**
*Soit* $(A, +, \times, .)$ *et* $(B, +, \times, .)$ *deux* $\mathbb{K}$*-algèbres. Alors,* $\varphi : A \to B$ *est un morphisme d'algèbres si et seulement si :*

*(a)* $\varphi(1_A) = 1_B$ *;*

*(b)* $\forall (x, y) \in A^2,\ \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ *;*

*(c)* $\forall (\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times A \times A,\ \varphi(\lambda x + y) = \lambda\varphi(x) + \varphi(y)$.

**Preuve (non traitée en classe)**
Ces trois conditions sont évidemment nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes.
La condition (c) utilisée avec $\lambda = 1$ entraîne en particulier que $\forall (x, y) \in A^2,\ \varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.
Combinée avec les conditions (a) et (b), on obtient que $\varphi$ est un morphisme d'anneaux. Enfin, la condition (c) entraîne également la linéarité de $\varphi$.

**Exemple (Représentation matricielle dans une base fixée)**
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et soit $\mathcal{B}$ une base de $E$.
Alors, l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & Mat_{\mathcal{B}}(f) \end{array} \right.$ est un morphisme d'algèbres bijectif.
Cet isomorphisme est très important, il permet de transférer les propriétés des matrices aux endomorphismes, et vice versa.