CH02 : Intégration sur un intervalle quelconque

On va étendre ici l'intégrale au cas de fonctions continues par morceaux sur des intervalles **qui ne sont pas des segments**, c'est-à-dire des intervalles non bornés et/ou non fermés.
Dans tout le chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1 (Fonction continue par morceaux)

(i) *Soit deux réels $a < b$. Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ est dite* **continue par morceaux** *lorsqu'il existe une subdivision $(x_0, \cdots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, la restriction $f_{]x_k,x_{k+1}[}$ possède un prolongement continu sur $[x_k, x_{k+1}]$.*

(ii) *Etant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$ (pas nécessairement un segment), on dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux lorsque sa restriction à tout segment $[a, b] \subset I$ est continue par morceaux.*

Notation
Etant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on notera :
$\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^I$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$,
$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$,
$\mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On obtient facilement les résultats suivants (que l'on admettra ici).

Théorème 2 (Structure algébrique des ensembles de fonctions)
Pour tout intervalle I, l'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et les ensembles $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, donc des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
De plus, on a $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$.

I Intégrales impropres (ou généralisées)

1) Sur un intervalle semi-ouvert borné

On considère deux réels a, b tels que $a < b$.

Définition 3 (Convergence d'une intégrale impropre en b)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a; b[, \mathbb{K})$.

(i) *On dit que* **l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si** $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ *possède une limite finie lorsque $x \to b^-$. Dans ce cas, on pose* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

(ii) *Sinon (si $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une lim. infinie ou pas de lim. quand $x \to b^-$), on dit que* **l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge**.

Vocabulaire
On emploie indifféremment les expressions "intégrale impropre" ou "intégrale généralisée" dès que l'on veut intégrer une fonction sur un intervalle qui n'est pas un segment.

Notation
On peut également employer les notations abrégées ("sans la variable d'intégration") :

$$\int_a^b f = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f.$$

Vocabulaire
Etudier **la nature** d'une intégrale impropre, c'est préciser si elle est convergente ou divergente.

Propriété 4 (Intégrale faussement impropre en b)
Si $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{K})$ et si f possède une limite finie en b^-, alors l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, et on a $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$, où $\tilde{f} \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b],\mathbb{K})$ est le prolongement de f à $[a;b]$.
Dans ce cas, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **faussement impropre**.

2) Sur un intervalle fermé non borné

Définition 5 (Convergence d'une intégrale impropre en $+\infty$)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;+\infty[,\mathbb{K})$, avec $a \in \mathbb{R}$.

(i) *On dit que* **l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si** $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ *possède une limite finie lorsque $x \to +\infty$. Dans ce cas, on pose $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.*

(ii) *Sinon (si $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite infinie ou pas de limite lorsque $x \to +\infty$), on dit que* **l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge**.

3) Sur un intervalle ouvert

Définition 6 (Convergence d'une intégrale doublement impropre)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(]a;b[,\mathbb{K})$ (avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$). On fixe $c \in]a;b[$.

(i) *On dit que* **l'intégrale doublement impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge** *si* **les deux intégrales impropres $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent**.
Dans ce cas, on pose $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$.

(ii) *Dans le cas contraire (dès que l'une des deux intégrales précédentes diverge), on dit que* **l'intégrale doublement impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$** *diverge.*

4) Propriétés de base

Les propriétés établies ici sont vraies pour des intégrales $\int_a^b f$ impropres en a et/ou b, les bornes a et b étant des réels ou $\pm\infty$.

Propriété 7 (Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale impropre)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$, *où* I *est un intervalle d'extrémités* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *et* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

(i) *Si les deux intégrales impropres* $\displaystyle\int_a^b f$ *et* $\displaystyle\int_a^b g$ *sont convergentes, alors pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$, *l'intégrale* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)$ *est convergente, et on a* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$.
En d'autres termes, l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$ *dont l'intégrale converge est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$ *est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.*

(ii) *La forme linéaire* $f \mapsto \int_a^b f$ *est positive, c'est-à-dire :*

$$\left(f \geq 0 \text{ et } \int_a^b f \quad \text{converge}\right) \implies \int_a^b f \geq 0.$$

(iii) *La forme linéaire* $f \mapsto \int_a^b f$ *est croissante, c'est-dire :*

$$\left(f \leq g, \quad \int_a^b f \quad \text{converge et} \int_a^b g \quad \text{converge}\right) \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Propriété 8 (Convergence de l'intégrale impropre d'une fct. complexe)
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *d'extrémités* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *et* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *et soit* $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{C})$.
Alors, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ *converge si et seulement si les deux intégrales impropres* $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)$ *et* $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)$ *convergent. Dans ce cas, on a* $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i \int_a^b \mathrm{Im}(f)$.

Propriété 9 (Fonction continue positive d'intégrale impropre nulle)
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *d'extrémités* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *et* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *Soit* $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, *telle que* $\boldsymbol{f \geq 0}$ *et* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ *converge. Alors,*

$$\int_a^b f = 0 \implies \forall t \in [a; b[, \ f(t) = 0.$$

Propriété 10 (Relation de Chasles pour les intégrales impropres)
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *d'extrémités* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *et* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *et* $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$.
Si $\int_a^b f$ *converge, alors pour tout* $c \in I$, *on a*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(avec convergence des deux intégrales du membre de droite).

Propriété 11 (Dérivation par rapport à la borne inférieure)
Si $f \in \mathcal{C}^0([a, +\infty[, \mathbb{K})$ *et si l'intégrale* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ *converge, alors la fonction* $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $[a, +\infty[$, *et* $G' = -f$.

II Comparaison de fonctions positives

Comme pour les séries, on va donner des méthodes pour **étudier la convergence** d'une intégrale impropre, **sans passer par les primitives de f**, qui hélas ne sont pas toujours calculables.

1) Exemples de référence

On dispose d'une liste d'exemples de référence, **qu'il faut connaître par coeur**. On utilisera ensuite cas de référence pour étudier les autres intégrales impropres.

a) En 0

Propriété 12 (Logarithme en 0^+)
L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ *converge et* $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1$.

Propriété 13 (Intégrales de Riemann en 0^+)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *(impropre en 0) converge si et seulement si $\alpha < 1$. Dans ce cas, on a* $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$.

b) En $+\infty$

Propriété 14 (Exponentielle en $+\infty$)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si $\alpha > 0$.*
Dans ce cas, on a $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

Propriété 15 (Intégrales de Riemann en $+\infty$)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *(impropre en $+\infty$) converge si et seulement si $\alpha > 1$.*
Dans ce cas, on a $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}$.

2) Comparaison et équivalents

On dispose de résultats **spécifiques aux fonctions positives** pour étudier la convergence d'une intégrale impropre.
Pour éviter les répétitions, les résultats seront énoncés uniquement pour des fonctions continues par morceaux sur un intervalle $\boldsymbol{I = [a;b[}$ (avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), mais **ils s'adaptent à tout type d'intervalle**.

a) Critère de majoration

Propriété 16 (CNS de convergence de l'intégrale d'une fonction positive)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{R})$ positive. L'intégrale $\int_a^b f$ *converge si et seulement si la fonction* $F : x \mapsto \int_a^x f$ *est majorée sur $[a,b[$.*

Notation
Lorsque $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{R})$ est **positive**, on pourra noter $\int_a^b f < +\infty$ lorsque cette intégrale converge, et noter $\int_a^b f = +\infty$ dans le cas divergent (puisque dans ce cas, $\int_a^x f \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} +\infty$).
On dispose donc de notations analogues à celles des familles sommables.

Théorème 17 (Critère de majoration pour les fonctions positives)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{R})$ *telles que* $0 \leq f \leq g$. *Alors,*

(i) $\displaystyle\int_a^b g$ *converge* $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f$ *converge, et dans ce cas,*

$$0 \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f$ *diverge* $\Longrightarrow$ $\displaystyle\int_a^b g$ *diverge.*

b) Critère des équivalents

Théorème 18 (Critère des équivalents pour les fonctions positives)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{R})$.

Si $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$ *et si* $f \geq 0$ *au voisinage de* b^-, *alors* g *aussi et les intégrales impropres* $\displaystyle\int_a^b f$ *et* $\displaystyle\int_a^b g$ *sont de même nature.*

Pour résumer :

Méthode
Pour étudier la convergence de l'intégrale impropre d'une fonction f **positive**, *on peut* **comparer** f **à une fonction de référence** *(c'est-à-dire dont on connaît la convergence de l'intégrale), en utilisant soit une inégalité, soit un équivalent.*
Si f *est équivalente à une fonction* g *qui garde un signe constant au voisinage de* b, *alors on peut utiliser le critère des équivalents.*

III Convergence absolue, intégrabilité

1) Convergence absolue

Dans le cas où l'on a affaire à des fonctions qui ne sont pas positives (réelles de signe non constant ou à valeurs complexes), on dispose d'un outil supplémentaire pour étudier la convergence d'une intégrale impropre.

Là encore, tout est énoncé sur un intervalle du type $\boldsymbol{I = [a, b[}$ avec $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R} \cup \boldsymbol{\{+\infty\}}$, mais tout s'adapte à tout type d'intervalle.

Définition 19 (Intégrale impropre absolument convergente)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{K})$. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ est **absolument convergente** *lorsque $\displaystyle\int_a^b |f|$ est convergente.*

Théorème 20 («CVA $\Longrightarrow$ CV»)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{K})$. **Si** *$\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente,* **alors** *elle est convergente.*
On a donc $\displaystyle\left(\int_a^b |f| \text{ converge} \implies \int_a^b f \text{ converge}\right)$.

Méthode
Pour étudier la convergence de l'intégrale impropre d'une fonction de signe non constant ou à valeurs complexes, on peut **d'abord étudier sa convergence absolue**.

- *Avantage : cela revient à travailler avec une fonction positive, sur laquelle on peut tester les critères de la partie précédente.*
- *Inconvénient : si l'intégrale ne converge pas absolument, alors ça ne montre rien quant à sa convergence.*

Définition 21 (Intégrale impropre semi-convergente)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{K})$. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ est **semi-convergente** *lorsque $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente mais pas absolument convergente, c'est-à-dire lorsque $\displaystyle\int_a^b f$ converge et $\displaystyle\int_a^b |f|$ diverge.*

Propriété 22 (Inégalité intégrale/module)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{K})$. On suppose que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente.
Alors, on a $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

2) Fonctions intégrables

Ici, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ quelconque (ouvert, semi-ouvert, borné ou non, fermé, etc.), d'extrémités $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Définition 23 (Fonction intégrable sur un intervalle quelconque)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que **f est intégrable sur I** *si elle est continue par morceaux et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.*

Notation
Lorsque f est intégrable sur I, on pourra noter $\displaystyle\int_I f = \int_a^b f$ son intégrale.
On évitera cette notation pour les intégrales semi-convergentes.

Propriété 24 (Propriétés immédiates des fonctions intégrables)
Soit $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$.

(i) *Si* f *est intégrable sur* I*, alors* f *est intégrable sur tout intervalle* $J \subset I$.

(ii) *Si* $|f| \leq g$ *avec* g *intégrable sur* I*, alors* f *est intégrable sur* I.

(iii) *Si* $I = [a, b[$ *et* $f(x) \underset{x \to b^-}{\sim} g(x)$*, alors* f *est intégrable sur* I *ssi* g *est intégrable sur* I.

(iv) *Si* f *est intégrable sur* I*, alors* $|f|$ *aussi, et* $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

(v) *Si* f *est intégrable,* **continue** *et positive sur* I*, alors*

$$\int_I f = 0 \implies f = 0.$$

Propriété 25 (Règle de comparaison en O, o)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b[, \mathbb{K})$*, avec* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

(i) *Si* $f(x) = \underset{x \to b^-}{O}(g(x))$ *et si* g *est intégrable sur* $[a, b[$*, alors* f *est intégrable sur* $[a, b[$.

(ii) *Si* $f(x) = \underset{x \to b^-}{o}(g(x))$ *et si* g *est intégrable sur* $[a, b[$*, alors* f *est intégrable sur* $[a, b[$.

Théorème 26 (Structure d'espace vectoriel)
L'ensemble des fonctions intégrables $I \to \mathbb{K}$ *est un* $\mathbb{K}$ *espace-vectoriel (en fait un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$*). De plus,* $f \mapsto \int_I f$ *est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.*

Notation
L'espace vectoriel des fonctions intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ se note en général $L^1(I, \mathbb{K})$.

3) Des exemples

Méthode
Pour étudier la convergence absolue d'une intégrale impropre, on peut :

- *chercher à* **majorer $|f(t)|$** *par une fonction intégrable connue.*
- *chercher à déterminer* **un équivalent simple de $|f(t)|$** *lorsque* $t \to b^-$.
- *examiner* **la limite de $t^\alpha f(t)$** *lorsque* $t \to 0^+$ *ou* $t \to +\infty$*, pour* **comparer f à une fonction de Riemann $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$** *au voisinage de* 0 *ou de* $+\infty$.

IV IPP et changement de variables généralisés

On ne traitera par commodité que le cas des intervalles du type $[\boldsymbol{a};\boldsymbol{b}[$ (avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), mais les résultats présentés ici restent vrais pour tout type d'intervalle.

1) Intégration par parties généralisée

Théorème 27 (IPP généralisée)
Soient $u, v \in \mathcal{C}^1([a, b[, \mathbb{K})$. Si $\lim\limits_{b^-} uv$ existe dans $\mathbb{K}$, alors les intégrales $\int_a^b u'v$ et $\int_a^b uv'$ sont de même nature, et si elles convergent, on a

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv',$$

où $[uv]_a^b = \lim\limits_{x \to b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.

2) Changement de variable généralisé

Théorème 28 (Changement de variables généralisé)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a; b[, \mathbb{K})$, et soit $\varphi : [\alpha; \beta[\to [a; b[$ une **bijection** *strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les intégrales impropres $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature et égales en cas de convergence.*

V Intégration des relations de comparaison

1) Cas convergent

Théorème 29 (Intégration des relations de comparaison, cas convergent)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b[,\mathbb{K})$ *et* $g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b[,\mathbb{R})$ *(avec* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*). On suppose que* $g \geq 0$ *et* $\int_a^b g$ *converge.*

(i) *Si* $f(x) = \underset{x\to b^-}{O}(g(x))$*, alors* f *est intégrable sur* $[a,b[$ *et* $\int_x^b f = \underset{x\to b^-}{O}(\int_x^b g)$.

(ii) *Si* $f(x) = \underset{x\to b^-}{o}(g(x))$*, alors* f *est intégrable sur* $[a,b[$ *et* $\int_x^b f = \underset{x\to b^-}{o}(\int_x^b g)$.

(iii) *Si* $f(x) \underset{x\to b^-}{\sim} g(x)$*, alors* f *est intégrable sur* $[a,b[$ *et* $\int_x^b f \underset{x\to b^-}{\sim} \int_x^b g$.

2) Cas divergent

Théorème 30 (Intégration des relations de comparaison, cas divergent)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b[,\mathbb{K})$ *et* $g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b[,\mathbb{R})$ *(avec* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$*). On suppose que* $g \geq 0$ *et* $\int_a^b g$ *diverge.*

(i) *Si* $f(x) = \underset{x\to b^-}{O}(g(x))$*, alors* $\int_a^x f = \underset{x\to b^-}{O}(\int_a^x g)$.

(ii) *Si* $f(x) = \underset{x\to b^-}{o}(g(x))$*, alors* $\int_a^x f = \underset{x\to b^-}{o}(\int_a^x g)$.

(iii) *Si* $f(x) \underset{x\to b^-}{\sim} g(x)$*, alors* f *est non intégrable sur* $[a,b[$ *et* $\int_a^x f \underset{x\to b^-}{\sim} \int_a^x g$.