CH02 : Intégration sur un intervalle quelconque

Table des matières

On va étendre ici l'intégrale au cas de fonctions continues par morceaux sur des intervalles **qui ne sont pas des segments**, c'est-à-dire des intervalles non bornés et/ou non fermés.
Dans tout le chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1 (Fonction continue par morceaux)

(i) *Soit deux réels $a < b$. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est dite* **continue par morceaux** *lorsqu'il existe une subdivision $(x_0, \cdots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, la restriction $f_{]x_k, x_{k+1}[}$ possède un prolongement continu sur $[x_k, x_{k+1}]$.*

(ii) *Etant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$ (pas nécessairement un segment), on dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux lorsque sa restriction à tout segment $[a,b] \subset I$ est continue par morceaux.*

Remarque
Par définition, une fonction continue par morceaux sur un intervalle I possède des limites finies à gauche et à droite (lorsque cela a un sens) en tout point de I.

<u>ATTENTION !</u>

- Toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ est bornée, mais n'atteint pas nécessairement ses bornes (à la différence d'une fonction continue).
- Si I n'est pas un segment, une fonction continue par morceaux sur I n'est pas nécessairement bornée.

Notation
Etant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, on notera :
$\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ ou $\mathbb{K}^I$ l'ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$,
$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$,
$\mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On obtient facilement les résultats suivants (que l'on admettra ici).

Théorème 2 (Structure algébrique des ensembles de fonctions)
Pour tout intervalle I, l'ensemble $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et les ensembles $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$, donc des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
De plus, on a $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$.

Preuve (non traitée en classe)

I Intégrales impropres (ou généralisées)

1) Sur un intervalle semi-ouvert borné

On considère deux réels a, b tels que $a < b$.

Définition 3 (Convergence d'une intégrale impropre en b)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a; b[, \mathbb{K})$.

(i) *On dit que* **l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge si** $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ *possède une limite finie lorsque $x \to b^-$. Dans ce cas, on pose* $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

(ii) *Sinon (si $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une lim. infinie ou pas de lim. quand $x \to b^-$), on dit que* **l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge**.

Vocabulaire
On emploie indifféremment les expressions "intégrale impropre" ou "intégrale généralisée" dès que l'on veut intégrer une fonction sur un intervalle qui n'est pas un segment.

Notation
On peut également employer les notations abrégées ("sans la variable d'intégration") :

$$\int_a^b f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f.$$

Remarque

- *Pour tout $x \in [a;b[$, l'intégrale $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe car f est continue par morceaux sur le* **segment** $[a, x]$ *et elle ne dépend que de x,* **pas de t** *(variable muette) !*
- *Dans le cas où $f \in \mathcal{C}^0([a, b[, \mathbb{K})$, la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ revient à dire que la primitive $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ possède une limite finie en b^-.*

Remarque
On dispose évidemment d'une définition analogue si $\boldsymbol{f \in \mathcal{C}^0_{pm}(]a;b], \mathbb{K})}$.
Dans ce cas, en cas de convergence, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$.

Vocabulaire
Etudier **la nature** d'une intégrale impropre, c'est préciser si elle est convergente ou divergente.

Exemple
Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Etudier la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.
La fonction f est continue par morceaux sur $]0, 1]$ (car continue), et

$$\forall x \in]0;1], \qquad \int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = \left[2\sqrt{t}\right]_x^1 = 2 - 2\sqrt{x},$$

donc $\displaystyle\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 2$. Ceci montre que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 2$.

Propriété 4 (Intégrale faussement impropre en b)
Si $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[, \mathbb{K})$ et si f possède une limite finie en b^-, alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge, et on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \tilde{f}(t)\mathrm{d}t$, où $\tilde{f} \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b], \mathbb{K})$ est le prolongement de f à $[a;b]$.
Dans ce cas, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **faussement impropre**.

ATTENTION !
Il est essentiel que la borne supérieure b de l'intervalle soit **un réel**, et pas $+\infty$ (voir le paragraphe suivant).

Remarque
Evidemment, on peut transposer le résultat en a^+, si $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(]a;b], \mathbb{K})$.

Exemple
Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ est convergente.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0;1]$, et possède une limite finie en 0^+ (qui est égale à 1), puisque $\dfrac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{t}{t} = 1$. L'intégrale est donc convergente (car faussement impropre en 0).

2) Sur un intervalle fermé non borné

Définition 5 (Convergence d'une intégrale impropre en $+\infty$)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;+\infty[,\mathbb{K})$, avec $a \in \mathbb{R}$.

(i) On dit que **l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge si** *$\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque $x \to +\infty$. Dans ce cas, on pose $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.*

(ii) Sinon (si $\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite infinie ou pas de limite lorsque $x \to +\infty$), on dit que **l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ diverge**.

Remarque
Cette définition est analogue à la convergence des séries :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k,$$

$$\int_0^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f.$$

Ici, les "intégrales partielles" $\displaystyle\int_a^x f$ jouent donc le rôle des sommes partielles.

Exemple
Etudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$.

- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = 1$, car $\displaystyle\int_1^{x} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 - \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
- L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge, car $\displaystyle\int_1^{x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^x = \ln(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Remarque
Là encore, on a une définition analogue si $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(]-\infty;b],\mathbb{K})$, avec $b \in \mathbb{R}$.
Dans ce cas, en cas de convergence, on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty} \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$.

ATTENTION !
La notion d'intégrale faussement impropre n'existe pas dans ce contexte d'intervalle non borné !
Si f est continue par morceaux sur $[a;+\infty[$ et possède une limite finie en $+\infty$, **on ne peut pas en déduire que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge** (voir les exemples précédents pour s'en convaincre).

ATTENTION !
Le fait que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ n'est **ni suffisant**, **ni nécessaire** pour que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge.
Par exemple :

- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge, même si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} = 0$;

- on peut construire des fonctions qui n'ont pas de limite en $+\infty$ et dont l'intégrale impropre converge quand même (voir les exercices).

La situation est donc plus compliquée que pour les séries (rappel : $\sum u_n$ converge $\Longrightarrow u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$).

3) Sur un intervalle ouvert

Définition 6 (Convergence d'une intégrale doublement impropre)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(]a;b[,\mathbb{K})$ (avec $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$). On fixe $c \in]a;b[$.

(*i*) *On dit que* **l'intégrale doublement impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge** *si* **les deux intégrales impropres $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ convergent**.

Dans ce cas, on pose $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$

(*ii*) *Dans le cas contraire (dès que l'une des deux intégrales précédentes diverge), on dit que* **l'intégrale doublement impropre $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$** *diverge.*

Remarque
Cette définition a bien un sens car la convergence des deux intégrales $\int_a^c f(t)\mathrm{d}t$ (impropre en a) et $\int_c^b f(t)\mathrm{d}t$ (impropre en b) **ne dépend pas** *du point c choisi (d'après la relation de Chasles, vraie sur tout segment de $]a,b[$ contenant c).*

ATTENTION !
Pour étudier la convergence d'une intégrale doublement impropre, il faut donc étudier **séparément** la convergence de deux intégrales impropres.

Exemple
Etudier la nature de l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$.
La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est continue sur l'intervalle $]-\infty,,0[$, donc l'intégrale proposée est doublement impropre. On doit donc (par exemple) étudier la nature de $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ et $\int_{-1}^0 \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$.

- Pour tout $x < -1$, on a $\int_x^{-1} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_x^{-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$,
donc $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ converge.
- Pour tout $x \in]-1;0[$, on a $\int_{-1}^x \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2t^2}\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} \underset{x\to0^-}{\longrightarrow} -\infty$,
donc $\int_{-1}^0 \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ diverge.

Finalement, l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ diverge.

4) Propriétés de base

Les propriétés établies ici sont vraies pour des intégrales $\int_a^b f$ impropres en a et/ou b, les bornes a et b étant des réels ou $\pm\infty$.

Propriété 7 (Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale impropre)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$, où I est un intervalle d'extrémités $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

(i) *Si les deux intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont convergentes, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)$ est convergente, et on a $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g$.*
En d'autres termes, l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$ dont l'intégrale converge est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

(ii) *La forme linéaire $f \mapsto \int_a^b f$ est positive, c'est-à-dire :*

$$\left(f \geq 0 \text{ et } \int_a^b f \quad \text{converge} \right) \implies \int_a^b f \geq 0.$$

(iii) *La forme linéaire $f \mapsto \int_a^b f$ est croissante, c'est-dire :*

$$\left(f \leq g, \quad \int_a^b f \quad \text{converge et} \int_a^b g \quad \text{converge} \right) \implies \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

Preuve (non traitée en classe)

(i) Traitons seulement le cas où $I = [a; b[$ avec $a < b$ réels, les autres cas étant analogues.
Notons $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ et $G : x \mapsto \displaystyle\int_a^x g$ (ces deux fcts. sont définies sur I). Fixons $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $x \in I$, on a $\displaystyle\int_a^x (\lambda f + g) = \lambda F(x) + G(x)$ (par linéarité de l'intégrale **sur le segment** $[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{x}]$). En faisant tendre $x \to b^-$, on obtient (puisque F et G ont des limites finies en b^- par hypothèse) :

$$\int_a^x (\lambda f + g) \underset{x \to b^-}{\longrightarrow} \lambda \lim_{x \to b^-} F(x) + \lim_{x \to b^-} G(x) \in \mathbb{K},$$

ce qui montre que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + g)$ converge et vaut $\lambda \displaystyle\int_a^b f + \int_a^b g$.

(ii) Si f est positive, alors l'intégrale impropre convergente $\int_a^b f$ est limite d'intégrales positives (puisque f est positive sur tous les segments $[a, x] \subset [a, b|)$, dont est elle-même positive.

(iii) Evident d'après les deux points précédents, en considérant la fonction positive $g - f$.

<u>**ATTENTION !**</u>
Pour utiliser la linéarité de l'intégrale impropre, il faut vérifier au préalable que **les deux** intégrales sont convergentes. Si ce n'est pas le cas, on a seulement droit à la linéarité de l'intégrale **sur les segments** inclus dans I.

Remarque («CV+DV=DV»)
Si $\displaystyle\int_a^b f$ converge et si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^b (f+g)$ diverge.
En effet on a $g = (f+g) - f$, donc si $\displaystyle\int_a^b (f+g)$ converge, on a $\displaystyle\int_a^b g$ converge (d'après la proposition précédente), ce qui est contradictoire.

<u>**ATTENTION !**</u> **(«DV+DV= ?»)**
Si $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ divergent, alors **on ne peut rien dire** sur la nature de $\displaystyle\int_a^b (f+g)$.

Exemple

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t$ *converge et la calculer.*
La fonction $t \mapsto \frac{2}{t^2-1}$ est continue sur $[2, +\infty[$ donc l'intégrale est impropre en $+\infty$.
En remarquant que $\dfrac{2}{t^2-1} = \dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}$ pour tout $t \geq 2$, on a

$$\forall x \geq 2, \qquad \int_2^x \frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t = \int_2^x \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t = [\ln|t-1| - \ln|t+1|]_2^x = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \ln(3).$$

Puisque $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(1) = 0$, on en déduit que $\displaystyle\int_2^x \frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(3)$.

ATTENTION !
Dans l'exemple précédent, **ne surtout pas décomposer** de la façon suivante :

$$\text{«}\int_2^{+\infty} \frac{2}{t^2-1}\mathrm{d}t = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t-1}\mathrm{d}t - \int_2^{+\infty} \frac{1}{t+1}\mathrm{d}t\text{».}$$

En effet, **cette écriture n'a aucun sens** puisque les deux intégrales du membre de droite sont divergentes (étant donné que les primitives $t \mapsto \ln(t-1)$ et $t \mapsto \ln(t+1)$ ne possèdent pas de limite finie en $+\infty$).

Propriété 8 (Convergence de l'intégrale impropre d'une fct. complexe)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{C})$. Alors, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ converge si et seulement si les deux intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Im}(f)$ convergent. Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i\int_a^b \mathrm{Im}(f)$.

Propriété 9 (Fonction continue positive d'intégrale impropre nulle)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ Soit $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, telle que $\boldsymbol{f \geq 0}$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge. Alors,

$$\int_a^b f = 0 \implies \forall t \in [a; b[,\ f(t) = 0.$$

ATTENTION !
Si f est seulement continue par morceaux, la propriété précédente est fausse (comme pour l'intégrale sur un segment).

Propriété 10 (Relation de Chasles pour les intégrales impropres)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$. Si $\int_a^b f$ converge, alors pour tout $c \in I$, on a

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(avec convergence des deux intégrales du membre de droite).

Preuve (non traitée en classe)
Par exemple dans le cas où $I = [a, b[$: écrire la relation de Chasles sur les segments $[a, x]$ et passer à la limite quand $x \to b^-$.

Propriété 11 (Dérivation par rapport à la borne inférieure)
Si $f \in \mathcal{C}^0([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, alors la fonction $G : x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, et $G' = -f$.

II Comparaison de fonctions positives

Comme pour les séries, on va donner des méthodes pour **étudier la convergence** d'une intégrale impropre, **sans passer par les primitives de f**, qui hélas ne sont pas toujours calculables.

1) Exemples de référence

On dispose d'une liste d'exemples de référence, **qu'il faut connaître par coeur**. On utilisera ensuite cas de référence pour étudier les autres intégrales impropres.

a) En 0

Propriété 12 (Logarithme en 0^+)
L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ *converge et* $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t = -1$.

Propriété 13 (Intégrales de Riemann en 0^+)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *(impropre en 0) converge si et seulement si $\alpha < 1$. Dans ce cas, on a* $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$.

b) En $+\infty$

Propriété 14 (Exponentielle en $+\infty$)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si $\alpha > 0$.*
Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$.

Propriété 15 (Intégrales de Riemann en $+\infty$)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ *(impropre en $+\infty$) converge si et seulement si $\alpha > 1$.*
Dans ce cas, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}$.

Remarque
L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *est divergente pour n'importe quelle valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.*
En effet, cette intégrale doublement impropre converge si $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ *convergent, mais cela ne se produit jamais, car cela équivaut respectivement à $\alpha < 1$ et $\alpha > 1$ (conditions incompatibles).*

2) Comparaison et équivalents

On dispose de résultats **spécifiques aux fonctions positives** pour étudier la convergence d'une intégrale impropre.
Pour éviter les répétitions, les résultats seront énoncés uniquement pour des fonctions continues par morceaux sur un intervalle $\boldsymbol{I = [a;b[}$ (avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), mais **ils s'adaptent à tout type d'intervalle**.

a) Critère de majoration

Propriété 16 (CNS de convergence de l'intégrale d'une fonction positive)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{R})$ positive. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ *converge si et seulement si la fonction* $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ *est majorée sur $[a,b[$.*

Notation
Lorsque $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{R})$ est **positive**, on pourra noter $\displaystyle\int_a^b f < +\infty$ lorsque cette intégrale converge, et noter $\displaystyle\int_a^b f = +\infty$ dans le cas divergent (puisque dans ce cas, $\displaystyle\int_a^x f \underset{x\to b^-}{\longrightarrow} +\infty$).
On dispose donc de notations analogues à celles des familles sommables.

Théorème 17 (Critère de majoration pour les fonctions positives)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{R})$ telles que $0 \leq f \leq g$. Alors,

(i) $\displaystyle\int_a^b g$ *converge* $\implies \displaystyle\int_a^b f$ *converge, et dans ce cas,*

$$0 \leq \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

(ii) $\displaystyle\int_a^b f$ *diverge* $\implies \displaystyle\int_a^b g$ *diverge.*

Remarque (Une comparaison locale suffit)
Il suffit que l'inégalité $0 \leq f \leq g$ soit vraie au voisinage de b^- (c'est-à-dire sur un intervalle $[b-\delta;b[$ avec $\delta > 0$ si $b \in \mathbb{R}$ et un intervalle $[X,+\infty[$ si $b = +\infty$) pour que la convergence de $\int_a^b g$ entraîne celle de $\int_a^b f$.
Cela vient du fait que $\int_a^b f$ converge ssi $\int_{b-\delta}^b f$ converge (et de même, $\int_a^{+\infty} f$ converge ssi $\int_X^{+\infty} f$ converge).
En revanche, l'inégalité $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ n'est plus nécessairement vraie.

Exemple
Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$ converge.
La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^3+1}$ est continue sur $[0,+\infty[$.
On a $0 \leq \dfrac{1}{t^3+1} \leq \dfrac{1}{t^3}$ pour tout $t > 0$ et l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ converge, donc d'après le critère de comparaison, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$ converge, et donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}$ converge.

ATTENTION !
Dans l'exemple précédent, on ne peut pas utiliser le critère de comparaison directement sur l'intervalle $]0;+\infty[$ (bien que l'inégalité $0 \leq \dfrac{1}{t^3+1} \leq \dfrac{1}{t^3}$ soit vraie sur cet intervalle), car l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}$ (doublement impropre) diverge.

b) Critère des équivalents

Théorème 18 (Critère des équivalents pour les fonctions positives)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{R})$.
Si $f(t) \underset{t\to b^-}{\sim} g(t)$ et si $f \geq 0$ au voisinage de b^-, alors g aussi et les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_a^b g$ sont de même nature.

Remarque (Un signe constant local suffit)
Ce résultat reste vrai si on remplace «positive» par «négative». L'important est que f garde un signe constant au voisinage de b^-.

Exemple

Etudier la nature de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\mathrm{d}t$.

En effet, la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t}$ est continue sur $]0;1]$, et $\dfrac{\sin(\sqrt{t})}{t} \underset{t\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{t^{1/2}} \geq 0$, donc, puisque $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}\mathrm{d}t$ converge, on en déduit par le critère des équivalents pour les fonctions positives que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\sqrt{t})}{t}\mathrm{d}t$ converge.

ATTENTION !

Cette proposition ne s'applique pas si les fonctions f et g ne gardent pas un signe constant au voisinage de b^-, ou si f et g sont à valeurs complexes.

Pour résumer :

Méthode

Pour étudier la convergence de l'intégrale impropre d'une fonction f **positive**, *on peut* **comparer f à une fonction de référence** *(c'est-à-dire dont on connaît la convergence de l'intégrale), en utilisant soit une inégalité, soit un équivalent.*
Si f est équivalente à une fonction g qui garde un signe constant au voisinage de b, alors on peut utiliser le critère des équivalents.

III Convergence absolue, intégrabilité

1) Convergence absolue

Dans le cas où l'on a affaire à des fonctions qui ne sont pas positives (réelles de signe non constant ou à valeurs complexes), on dispose d'un outil supplémentaire pour étudier la convergence d'une intégrale impropre.

Là encore, tout est énoncé sur un intervalle du type $\boldsymbol{I = [a, b[}$ avec $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R} \cup \boldsymbol{\{+\infty\}}$, mais tout s'adapte à tout type d'intervalle.

Définition 19 (Intégrale impropre absolument convergente)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[, \mathbb{K})$. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ est **absolument convergente** *lorsque $\displaystyle\int_a^b |f|$ est convergente.*

Remarque
Si f est réelle et de signe constant sur $[a, b[$, alors $\int_a^b f$ est absolument convergente si et seulement si elle est convergente, puisque $|f| = f$ ou $|f| = -f$ dans ce cas particulier.

Théorème 20 («CVA $\Longrightarrow$ CV»)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[, \mathbb{K})$. **Si** $\displaystyle\int_a^b f$ *est absolument convergente,* **alors** *elle est convergente.*
On a donc $\displaystyle\left(\int_a^b |f| \text{ converge} \implies \int_a^b f \text{ converge}\right)$.

Preuve (non traitée en classe)
Comme pour les séries :

- $\boxed{\text{Cas } \mathbb{K} = \mathbb{R}}$: décomposer $f = f^+ - f^-$, où
$$f^+ = \max(0, f), \qquad f^- = \max(0, -f).$$
On a $|f| = f^+ + f^-$, ainsi que $0 \leq f^+ \leq |f|$ et $0 \leq f^- \leq |f|$. On conclut par comparaison de fonctions positives que $\int_a^b f^+$ et $\int_a^b f^-$ convergent et par différence que $\int_a^b f = \int_a^b (f^+ - f^-)$ converge.
- $\boxed{\text{Cas } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$: décomposer $f = Re(f) + iIm(f)$, et utiliser les inégalités $|Re(f)| \leq |f|$ et $|Im(f)| \leq |f|$, qui entraînent que $\int_a^b Re(f)$ et $\int_a^b Im(f)$ convergent absolument, donc convergent (par le premier cas puisque $Re(f)$ et $Im(f)$ sont à valeurs réelles). Finalement $\int_a^b f$ converge.

Méthode
Pour étudier la convergence de l'intégrale impropre d'une fonction de signe non constant ou à valeurs complexes, on peut **d'abord étudier sa convergence absolue**.

- *Avantage : cela revient à travailler avec une fonction positive, sur laquelle on peut tester les critères de la partie précédente.*
- *Inconvénient : si l'intégrale ne converge pas absolument, alors ça ne montre rien quant à sa convergence.*

Exemple
Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2} dt$ *est convergente.*

L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{e^{it}}{t^2}\right| dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t^2} dt$ est absolument convergente, ce qui entraîne sa convergence.

ATTENTION !
La réciproque du théorème 20 est fausse. Il existe des intégrales convergentes mais pas absolument convergentes.

Définition 21 (Intégrale impropre semi-convergente)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{K})$. On dit que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ est **semi-convergente** *lorsque $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente mais pas absolument convergente, c'est-à-dire lorsque $\displaystyle\int_a^b f$ converge et $\displaystyle\int_a^b |f|$ diverge.*

Exemple
Montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

Elle n'est pas absolument convergente (puisque $\left|\frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\right| = \frac{1}{t}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$ diverge), mais pour tout $x > 1$, on a (par I.P.P sur le segment $[1,x]$) :

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{it}}{it}\right]_1^x + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{it}}{it^2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{ix}}{ix} - \frac{\mathrm{e}^{i}}{i} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{it}}{it^2}\mathrm{d}t.$$

Or, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{it^2}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, car $\left|\frac{\mathrm{e}^{it}}{it^2}\right| = \frac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge.

Ceci montre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{it}}{it^2}\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{C}$ (puisque la convergence absolue entraîne la convergence). Vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ix}}{ix} = 0$ (le module est $\frac{1}{x}$), on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{e}^{i}}{i} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{it^2}\mathrm{d}t \in \mathbb{C},$$

et donc l'intégrale étudiée est convergente.

Propriété 22 (Inégalité intégrale/module)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a;b[,\mathbb{K})$. On suppose que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ est absolument convergente. Alors, on a $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$.

ATTENTION !
Les bornes a et b doivent être dans le "bon sens" (c'est-à-dire $a < b$) !

Preuve (non traitée en classe)
Pour tout $x \in [a;b[$, la fonction f est continue sur le segment $[a;x]$, donc on a :

$$\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t.$$

En outre, $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{K}$ (car l'intégrale impropre est absolument convergente par hypothèse). Puis $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ existe aussi car la convergence absolue entraîne la convergence de l'intégrale. On obtient donc (par continuité du module) que

$$\lim_{x\to b^-} \left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right|.$$

On conclut en passant à la limite lorsque $x \to b^-$ dans l'inégalité $\left|\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \displaystyle\int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t$:

$$\left|\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \lim_{x\to b^-}\int_a^x |f(t)|\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t.$$

2) Fonctions intégrables

Ici, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ quelconque (ouvert, semi-ouvert, borné ou non, fermé, etc.), d'extrémités $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$.

Définition 23 (Fonction intégrable sur un intervalle quelconque)
Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que **f est intégrable sur I** *si elle est continue par morceaux et si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge.*

Remarque

- *Si f est intégrable sur I, alors son intégrale sur I converge (mais la réciproque est fausse) puisque la convergence absolue entraîne la convergence.*
- *Si f est de signe constant sur I, alors l'intégrabilité de f équivaut à la convergence de l'intégrale $\int_a^b f$, puisque $|f| = f$ ou $|f| = -f$ dans ce cas particulier.*
- *Si I est un segment, alors f est automatiquement intégrable, puisque $|f|$ est continue par morceaux sur le segment $I = [a, b]$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f|$ converge (elle n'est pas impropre).*

ATTENTION !
Une fonction f dont l'intégrale impropre sur I est semi-convergente **n'est pas intégrable**. Pourtant l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f$ existe quand même ! Attention au vocabulaire donc...

Exemple
La fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{it}}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1; +\infty[$, car on a vu que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{t}\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

Notation
Lorsque f est intégrable sur I, on pourra noter $\displaystyle\int_I f = \int_a^b f$ son intégrale.
On évitera cette notation pour les intégrales semi-convergentes.

Remarque
"Intégrable" est la notion équivalente à "sommable" pour les suites (u_n) indexées par $\mathbb{N}$:

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sommable } \iff \sum_{n\geq 0} |u_n| < +\infty,$$

$$f \text{ intégrable sur } I \iff \int_I |f| < +\infty.$$

Exemple

- $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$.
- $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, 1]$ ssi $\alpha < 1$, intégrable sur $[1, +\infty[$ ssi $\alpha > 1$.

- $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ssi $\alpha > 0$.

Propriété 24 (Propriétés immédiates des fonctions intégrables)
Soit $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$.

(i) Si f est intégrable sur I, alors f est intégrable sur tout intervalle $J \subset I$.

(ii) Si $|f| \leq g$ avec g intégrable sur I, alors f est intégrable sur I.

(iii) Si $I = [a, b[$ et $f(x) \underset{x\to b^-}{\sim} g(x)$, alors f est intégrable sur I ssi g est intégrable sur I.

(iv) Si f est intégrable sur I, alors $|f|$ aussi, et $\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

(v) Si f est intégrable, **continue** *et positive sur I, alors*

$$\int_I f = 0 \implies f = 0.$$

Preuve (non traitée en classe)

(i) Par positivité de $|f|$, on a

$$J \subset I \implies \int_J |f| \leq \int_I |f| \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\},$$

donc $\int_I |f| < +\infty \implies \int_J |f| < +\infty$.

(ii) C'est directement le critère de comparaison pour intégrales impropres de fonctions positives.

(iii) C'est directement le critère des équivalents appliqué aux fonctions positives $|f|$ et $|g|$ (qui sont également équivalentes au voisinage de b^- car $f(x) \underset{x\to b^-}{\sim} g(x) \implies |f(x)| \underset{x\to b^-}{\sim} |g(x)|$).

(iv) Reformulation de la prop. 22.

(v) Reformulation de la prop. 9.

Propriété 25 (Règle de comparaison en O, o)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a, b[, \mathbb{K})$, avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

(i) Si $f(x) = \underset{x\to b^-}{O}(g(x))$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.

(ii) Si $f(x) = \underset{x\to b^-}{o}(g(x))$ et si g est intégrable sur $[a, b[$, alors f est intégrable sur $[a, b[$.

Remarque
Bien sûr, ce résultat s'adapte à tout type d'intervalle I.

Preuve (non traitée en classe)

(i) C'est directement le critère de comparaison appliqué aux fonctions positives $|f|$ et $|g|$ (puisque $f(x) = \underset{x\to b^-}{O}(g(x))$ signifie qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f| \leq C|g|$ au voisinage de b^-).

(ii) Direct car $\left(f(x) = \underset{x\to b^-}{o}(g(x)) \implies f(x) = \underset{x\to b^-}{O}(g(x))\right)$.

Théorème 26 (Structure d'espace vectoriel)
L'ensemble des fonctions intégrables $I \to \mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ espace-vectoriel (en fait un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0_{pm}(I, \mathbb{K})$). De plus, $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Notation
L'espace vectoriel des fonctions intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ se note en général $L^1(I, \mathbb{K})$.

<u>ATTENTION !</u>
Le produit de deux fonctions intégrables sur I n'est pas nécessairement intégrable sur I !

3) Des exemples

Méthode

Pour étudier la convergence absolue d'une intégrale impropre, on peut :

- *chercher à* **majorer $|f(t)|$** *par une fonction intégrable connue.*
- *chercher à déterminer* **un équivalent simple de $|f(t)|$** *lorsque $t \to b^-$.*
- *examiner* **la limite de $t^\alpha f(t)$** *lorsque $t \to 0^+$ ou $t \to +\infty$, pour* **comparer f à une fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$** *au voisinage de 0 ou de $+\infty$.*

Exemple

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}+t}\mathrm{d}t$.

- la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}+t}$ est continue sur $]0;1]$ (puisque $\frac{1}{t}$ est bien défini et $\sqrt{t}+t > 0$ pour tout $t \in]0;1]$) ;
- pour tout $t \in]0;1]$, on a $\left|\dfrac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}+t}\right| = \dfrac{\left|\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right|}{\sqrt{t}+t} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}+t} \leq \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ converge donc, par le critère de comparaison, $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}+t}\right|\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}+t}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

Exemple

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^3+t\sin^2(t)}\mathrm{d}t$.

- la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^3+t\sin^2(t)}$ est continue sur $[0;+\infty[$ (puisque pour tout $t \geq 0$, $1+t^3+t\sin^2(t) \geq 1$, donc le dénominateur ne s'annule pas) ;
- on a $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^3+t\sin^2(t)}\right| = \dfrac{1}{1+t^3+t\sin^2(t)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^3}$
  (puisque $|1+t\sin^2(t)| \leq 1+t = \underset{t\to+\infty}{o}(t^3)$). Vu que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$ converge, on en déduit par le critère des équivalents que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^3+t\sin^2(t)}\right|\mathrm{d}t$ converge, et donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|\frac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^3+t\sin^2(t)}\right|\mathrm{d}t$ converge.

Finalement, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{it}}{1+t^3+t\sin^2(t)}\mathrm{d}t$ est absolument convergente, donc convergente.

Exemple

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)\sin(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

On pose $f(t) = \dfrac{\ln(t)\sin(t)}{1+t^2}$ pour tout $t \geq 1$. La fonction f est continue sur $[1;+\infty[$, et

$$|t^\alpha f(t)| = \frac{t^\alpha \ln(t)\ |\sin(t)|}{1+t^2} \leq \frac{t^\alpha \ln(t)}{1+t^2}.$$

Vu que $\dfrac{t^\alpha \ln(t)}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(t)}{t^{2-\alpha}}$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$ si on choisit $\alpha < 2$.

Par exemple, on a $f(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(1/t^{3/2})$, donc f est intégrable sur $[1,+\infty[$, ce qui montre la convergence de l'intégrale.

IV IPP et changement de variables généralisés

On ne traitera par commodité que le cas des intervalles du type $[a;b[$ (avec $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), mais les résultats présentés ici restent vrais pour tout type d'intervalle.

1) Intégration par parties généralisée

Théorème 27 (IPP généralisée)
Soient $u, v \in \mathcal{C}^1([a,b[,\mathbb{K})$. Si $\lim\limits_{b^-} uv$ existe dans $\mathbb{K}$, alors les intégrales $\int_a^b u'v$ et $\int_a^b uv'$ sont de même nature, et si elles convergent, on a

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv',$$

où $[uv]_a^b = \lim\limits_{x\to b^-} u(x)v(x) - u(a)v(a)$.

Remarque

- *Ce résultat s'adapte aux intervalles ouverts $]a,b[$, en supposant que $\lim\limits_{a^+} uv$ et $\lim\limits_{b^-} uv$ existent dans $\mathbb{K}$.*
- *On peut ne pas utiliser ce résultat et refaire des IPP sur des segments à chaque fois, puis passer à la limite.*

Exemple
Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ et la calculer.
La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et pour tout $x > 1$ on a :

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{\ln(x)}{x} + \int_1^x \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = -\frac{\ln(x)}{x} + 1 - \frac{1}{x}$$

(d'après la formule d'I.P.P. appliquée avec $u : t \mapsto -\dfrac{1}{t}$ et $v : t \mapsto \ln(t)$ sur le segment $[1;x]$). En faisant tendre $x \to +\infty$, on obtient, puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t = 1$, ce qui montre que l'intégrale étudiée est convergente et vaut 1.

2) Changement de variable généralisé

Théorème 28 (Changement de variables généralisé)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([a;b[,\mathbb{K})$, et soit $\varphi : [\alpha;\beta[\to [a;b[$ une **bijection** *strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$. Alors les intégrales impropres $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature et égales en cas de convergence.*

Rappel
Si $\varphi : [\alpha;\beta[\to [a;b[$ est une bijection continue et strictement croissante, alors on a automatiquement $\lim\limits_{x\to\beta^-} \varphi(x) = b$, ainsi que $\lim\limits_{y\to b^-} \varphi^{-1}(y) = \beta$.

Remarque

- *Si le changement de variable $\varphi : [\alpha;\beta[\to]b;a]$ est une bijection strictement* **décroissante** *de classe $\mathcal{C}^1$, on dispose d'un résultat analogue : en cas de convergence, les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$ sont égales.*

- *Le théorème de changement de variable généralisé est également* **vrai pour des intégrales doublement impropres** *: dans ce cas, on a $\varphi :]\alpha;\beta[\to]a;b[$, et f continue sur $]a;b[$.*

Exemple (Exemple de Riemann translaté)
Soit deux réels $a < b$. Alors :

- la fonction $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a,b]$ ssi $\alpha < 1$.
- la fonction $t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[a,b[$ ssi $\alpha < 1$.

ATTENTION !
Un changement de variable φ qui n'est **pas $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a;b]$** mais **seulement $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a;b[$** peut transformer une intégrale "classique" (c'est-à-dire sur un segment où f est $\mathcal{C}^0$) en intégrale impropre convergente.

Exemple
Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$ à l'aide du changement de variable $u = \tan(x/2)$.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos(x)}$ est continue sur le segment $[0;\pi]$ (le dénominateur ne s'y annule pas), donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$ est une intégrale "classique" (on peut donc la considérer comme une intégrale impropre convergente !).
En outre, le changement de variable $x \mapsto \varphi(x) = \tan(x/2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;\pi[$ (mais pas sur $[0;\pi]$), il définit une bijection strictement croissante de $[0;\pi[$ vers $[0;+\infty[$.
En appliquant la formule de changement de variable pour les intégrales impropres, on obtient (en posant $u = \tan(x/2)$, «$\mathrm{d}u = \frac{1}{2}(1+\tan^2(x/2))\mathrm{d}x$», et compte tenu de la formule $\cos(x) = \dfrac{1-\tan^2(x/2)}{1+\tan^2(x/2)}$ vraie pour tout $x \in [0;\pi[$) :

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x} = \int_0^\pi \frac{\left(1+\tan^2(x/2)\right)\mathrm{d}x}{3+\tan^2(x/2)} = \int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}u}{3+u^2}.$$

On remarque donc que l'intégrale «classique» a été transformée en une intégrale impropre convergente, mais facile à calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{2\mathrm{d}u}{3+u^2} = \lim_{U\to+\infty} \left[\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^U = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Remarque
Si on veut éviter l'utilisation (un peu délicate) du théorème de changement de variable généralisé, on peut là aussi :

- *se ramener à un segment $[\alpha;x] \subset [\alpha;\beta[$,*
- *faire un changement de variables "classique" sur le segment $[\alpha;x]$,*
- **à la fin**, *faire tendre $x \to \beta^-$.*

V Intégration des relations de comparaison

1) Cas convergent

Théorème 29 (Intégration des relations de comparaison, cas convergent)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b[,\mathbb{R})$ (avec $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$). On suppose que $g \geq 0$ et $\int_a^b g$ converge.

(i) *Si $f(x) = \underset{x\to b^-}{O}(g(x))$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\int_x^b f = \underset{x\to b^-}{O}(\int_x^b g)$.*

(ii) *Si $f(x) = \underset{x\to b^-}{o}(g(x))$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\int_x^b f = \underset{x\to b^-}{o}(\int_x^b g)$.*

(iii) *Si $f(x) \underset{x\to b^-}{\sim} g(x)$, alors f est intégrable sur $[a,b[$ et $\int_x^b f \underset{x\to b^-}{\sim} \int_x^b g$.*

Preuve (traitée en MPI*)
Analogue aux résultats correspondants sur les séries (cf. CH.1).

Remarque

- *Les relations de comparaison entre f et g (au voisinage du point b^-) se transfèrent donc sur les* **restes** *des intégrales convergentes.*
- *Ce théorème s'adapte aux intervalles de la forme $]a,b]$ avec $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$.*
- *Ce théorème fonctionne encore si on suppose que g est positive seulement au voisinage de b^-.*

Exemple
On a $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}$.

Exemple
On a (par IPP) $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{x}$.

2) Cas divergent

Théorème 30 (Intégration des relations de comparaison, cas divergent)
Soit $f \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in \mathcal{C}^0_{pm}([a,b[,\mathbb{R})$ (avec $b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$). On suppose que $g \geq 0$ et $\int_a^b g$ diverge.

(i) *Si $f(x) = \underset{x\to b^-}{O}(g(x))$, alors $\int_a^x f = \underset{x\to b^-}{O}(\int_a^x g)$.*

(ii) *Si $f(x) = \underset{x\to b^-}{o}(g(x))$, alors $\int_a^x f = \underset{x\to b^-}{o}(\int_a^x g)$.*

(iii) *Si $f(x) \underset{x\to b^-}{\sim} g(x)$, alors f est non intégrable sur $[a,b[$ et $\int_a^x f \underset{x\to b^-}{\sim} \int_a^x g$.*

Preuve (traitée en MPI*)
Analogue aux résultats correspondants sur les séries (cf. CH.1).

Remarque

- *Les relations de comparaison entre f et g (au voisinage du point b^-) se transfèrent donc sur les* **intégrales partielles**, *dans ce cas divergent.*
- *Ce théorème s'adapte aux intervalles de la forme $]a,b]$ avec $a \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$.*
- *Ce théorème fonctionne encore si on suppose que g est positive seulement au voisinage de b^-, mais cela complique légèrement la preuve.*

Exemple

On a $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln(t)}{t+1}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln^2(x)}{2}$.

Exemple
On a $\displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{t}dt \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln(x)$.