

CH01 : Séries numériques et sommabilité

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

La notation $|z|$ désignera la valeur absolue de z si z est un nombre réel, ou le module de z si z est un nombre complexe.

I Généralités sur les séries numériques

Nous allons rapidement rappeler les principales notions sur les séries numériques, déjà vues en MP2I.

1) Séries, sommes partielles

Notation

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites à valeurs dans \mathbb{K} (c'est-à-dire les applications $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$).

De telles suites u seront en général notées $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n) .

Définition 1 (Série à valeurs réelles ou complexes)

Etant donnée une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on appelle **série de terme général u_n** la suite $(S_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Pour chaque entier n , la quantité S_n est appelée **somme partielle de rang n** .

Vocabulaire

On parle de **série numérique** car les termes u_n sont des nombres réels ou complexes. On généralisera ultérieurement pour des suites à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie E (par exemple \mathbb{K}^n ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

2) Convergence, divergence

Définition 2 (Convergence/divergence d'une série)

On dit que la série de terme général u_n est **convergente** lorsque la suite des sommes partielles

(S_n) est convergente, c'est-à-dire lorsqu'il existe $S \in \mathbb{K}$ tel que $\sum_{k=0}^n u_k \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$.

Le nombre $S \in \mathbb{K}$ est alors appelé **somme de la série** et on note $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

Dans le cas contraire (si (S_n) diverge), on dit que **la série est divergente**.

Notation

Souvent, on désignera par $\sum u_n$ ou par $\sum_{n \geq n_0} u_n$ la série de terme général (u_n) . La notation sans

l'indice de départ n_0 illustre bien le fait que **la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes**.

Définition 3 (Reste d'une série convergente)

Si la série $\sum u_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

Cette quantité s'appelle le **reste d'ordre n** .

3) Séries géométriques

Le premier exemple de référence est le cas des "séries géométriques", c'est-à-dire les séries de la forme $\sum q^n$ avec $q \in \mathbb{C}$. Rappelons d'abord les résultats connus sur les **suites** géométriques :

Propriété 4 (Convergence des suites géométriques)Soit $q \in \mathbb{C}$.

- (i) Si $|q| > 1$, alors (q^n) diverge, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} |q^n| = +\infty$.
- (ii) Si $|q| < 1$, alors (q^n) converge, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- (iii) Si $|q| = 1$, alors $\begin{cases} \text{si } q = 1, (q^n) \text{ converge (elle est constante);} \\ \text{si } q \neq 1, (q^n) \text{ diverge (en restant bornée).} \end{cases}$

Etablissons maintenant le résultat qui nous intéresse (pour les **séries**) :

Théorème 5 (Convergence des séries géométriques)Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.

Dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Corollaire 6 (Reste d'une série géométrique convergente)Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Alors pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n_0}}{1-q}.$$

4) Séries de Riemann

Voici maintenant le second exemple de référence :

Théorème 7 (Séries de Riemann)Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée **série de Riemann** d'exposant α .

Cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Comme nous l'avons vu dans les exemples fondamentaux précédents, le principal problème des séries est qu'en général, **on ne sait pas expliciter les sommes partielles** S_n (voir les séries de Riemann), hormis certains cas simples. Donc, il est nécessaire de développer des outils pour l'étude de la convergence des séries, ce que nous allons faire dans les sections suivantes.

5) Condition nécessaire de convergence**Propriété 8 (Condition nécessaire de convergence d'une série)**Si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.**Définition 9 (Divergence grossière)**

On dit que la série $\sum u_n$ est **grossièrement divergente** si son terme général u_n ne tend pas vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Méthode

Pour étudier la convergence d'une série, on peut donc faire le **test rapide** suivant : **le terme général u_n tend-il vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$?**

Si non, la série est trivialement divergente (d'où l'appellation "divergence grossière"). Mais dans la plupart des cas, on aura $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, ce qui ne dit rien sur la convergence de la série ...

6) Opérations algébriques

Comme pour les suites, on dispose d'opérations algébriques sur les séries :

Propriété 10 (Opérations algébriques)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors la série $\sum (u_n + v_n)$ converge, et on a, pour tout entier n_0 :

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} v_k.$$

(ii) Si $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum (\lambda u_n)$ converge, et on a, pour tout entier n_0 :

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} (\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k.$$

(iii) Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.

7) Télécopage et lien suite-série

Le "télécopage" est un procédé de simplification de proche en proche de certaines sommes.

Lemme 11 (Télécopage)

Soient deux entiers naturels $n_0 \leq n$, et $(u_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On a :

$$\sum_{k=n_0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_{n_0}.$$

Théorème 12 (Lien suite-série)

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite à valeurs dans \mathbb{K} . Alors, on a l'équivalence :

$$\text{la suite } (u_n) \text{ converge} \iff \text{la série } \sum (u_{n+1} - u_n) \text{ converge.}$$

II Séries réelles à termes positifs

Dans cette section on considère des séries réelles $\sum u_n$, dont les termes u_n sont positifs à partir d'un certain rang.

1) Croissance des sommes partielles

Pour étudier la convergence des séries **à termes positifs**, on dispose de critères spécifiques, basés sur l'idée suivante :

Propriété 13 (Croissance des sommes partielles)

Si la suite réelle (u_n) est **positive** à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, alors la suite des sommes partielles (S_n) est croissante à partir du rang n_0 .

Corollaire 14 (Caractérisation des séries positives convergentes)

Si la suite réelle (u_n) est **positive** à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$, alors :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \text{la suite } (S_n) \text{ est majorée}$$

("une série à termes positifs converge ssi ses sommes partielles sont majorées").

2) Comparaison de séries à termes positifs

On abrègera "série à termes positifs" en "SATP".

Théorème 15 (Critère de majoration des SATP)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui vérifient $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge, et on a

$$0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Corollaire 16 (Comparaison en O, o)

Soit $(u_n), (v_n)$ deux suites réelles positives à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

(i) Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Théorème 17 (Critère des équivalents pour les SATP)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles **positives** à partir d'un certain rang et telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Alors, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature, c'est-à-dire que

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge.}$$

3) Règle de d'Alembert

Propriété 18 (Règle de d'Alembert)

Soit (u_n) une suite **strictement positive** à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

(i) Si $0 \leq \ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(iii) Si $\ell = 1$, alors on ne peut pas conclure.

4) Utilisation de la comparaison série-intégrale

Lorsque f est **monotone**, on peut déterminer par comparaison série-intégrale des **encadrements des sommes partielles et/ou des restes** de la série $\sum f(k)$ (comme dans la preuve du théorème de convergence des séries de Riemann).

Par monotonie de f , on peut se ramener au cas où la suite $(f(k))$ est positive à partir d'un certain rang (quitte à changer f en $-f$).

Méthode (Comparaison série-intégrale)

Pour tout entier k , on a si f est décroissante, on a

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^k f(t)dt,$$

alors que si f est croissante, on a

$$\int_{k-1}^k f(t)dt \leq f(k) \leq \int_k^{k+1} f(t)dt.$$

Il n'y a plus qu'à sommer ces encadrements pour obtenir un encadrement de la somme partielle

$$S_n = \sum_{k=n_0}^n f(k) \text{ ou du reste } R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k) \text{ (dans le cas d'une série convergente).}$$

Si les encadrements de S_n ou R_n obtenus sont assez fins (cela dépend de la rapidité de la décroissance/croissance de f), alors on peut même obtenir un **équivalent** de S_n (si $\sum f(k)$ diverge) ou de R_n (si $\sum f(k)$ converge).

III Séries numériques quelconques

Cette fois, on considère des séries $\sum u_n$ dont le terme général u_n est à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

1) Convergence absolue

Définition 19 (Série absolument convergente)

Si (u_n) est une suite réelle ou complexe, on dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** (ou "converge absolument") lorsque la série (positive) $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 20 (La convergence absolue entraîne la convergence)

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge. En d'autres termes,

$$\sum |u_n| \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge.}$$

Méthode

Pour étudier la convergence d'une série à termes de signe non constant ou complexes, on peut **d'abord étudier la convergence absolue**.

- Avantage : cela revient à travailler avec une **série positive** $\sum |u_n|$, sur laquelle on peut tester tous les critères de la partie précédente.
- Inconvénient : si la série ne converge pas absolument, alors ça ne montre rien quant à sa convergence.

Définition 21 (Semi-convergence)

On dit qu'une série numérique $\sum u_n$ est **semi-convergente** lorsqu'elle est **convergente mais pas absolument convergente**, c'est-à-dire lorsque $\sum u_n$ converge et $\sum |u_n|$ diverge.

Propriété 22 (Inégalité triangulaire infinie)

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors on a l'inégalité suivante :

$$\left| \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

Propriété 23 (Comparaison en O, o)

Soit (u_n) une suite à valeurs dans \mathbb{K} et (v_n) une suite réelle positive à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

- Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument (donc converge).
- Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument (donc converge).

2) Séries alternées

Un autre cas de référence est celui des **séries alternées**, c'est-à-dire dont le terme général u_n est réel et vérifie $u_n \times u_{n+1} \leq 0$ au moins à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que chaque terme de la suite a un signe contraire au terme précédent).

De telles séries sont de la forme :

$$\pm \sum (-1)^n a_n, \quad \text{avec } a_n \geq 0 \text{ à partir d'un certain rang.}$$

On dispose d'un résultat important sur ce type de série :

Théorème 24 (Critère spécial des séries alternées)

On considère la série $\sum (-1)^n a_n$.

Si la suite (a_n) est décroissante à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et si $a_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ (ce qui implique la positivité de a_n à partir de n_0), alors :

(i) La série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

(ii) Pour tout $n \geq n_0 - 1$, le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de son premier terme (donc $(-1)^{n+1} a_{n+1}$) et on a la majoration $|R_n| \leq a_{n+1}$.

IV Sommation des relations de comparaison

Dans cette section, on présente des nouveaux résultats sur les séries numériques convergentes, mais aussi divergentes. Les "relations de comparaison" désignent ici o , O et \sim (sous-entendu lorsque $n \rightarrow +\infty$ bien entendu).

1) Cas convergent

Théorème 25 (Somme des relations de comparaison, cas convergent)

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que (v_n) est positive à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et que $\sum v_n$ converge.

(i) Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

(iii) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

2) Cas divergent

Théorème 26 (Somme des relations de comparaison, cas divergent)

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On suppose que (v_n) est positive à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et que $\sum v_n$ diverge.

(i) Si $u_n = O(v_n)$, alors

$$\sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right).$$

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors

$$\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right).$$

(iii) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ diverge et

$$\sum_{k=0}^n u_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=0}^n v_k.$$

3) Applications classiques

a) Lemme de Cesàro

Lemme 27 (Lemme de Cesàro)

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{K}$, alors en posant $M_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on dit que (M_n) est la suite des moyennes de Cesàro), on a aussi $M_n \rightarrow \ell$.

b) Développement asymptotique à 3 termes de la série harmonique

En utilisant la sommation des relations de comparaison, on va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

- Tout d'abord, $\frac{1}{k} \sim \ln(1 + 1/k) = \ln(k+1) - \ln(k)$, et la série télescopique $\sum(\ln(k+1) - \ln(k))$ diverge (puisque la suite $(\ln(k))$ diverge), donc d'après le théorème de sommation des relations de comparaison (cas divergent), on a

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1 + 1/n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n).$$

- Posons $u_n = H_n - \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$. Pour déterminer un équivalent de u_n , on utilise la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1 + 1/n) = \frac{1}{n} (1 - 1/n + o(1/n)) - (1/n - 1/(2n^2) + o(1/n)) \sim -1/(2n^2),$$

donc la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, et donc la suite (u_n) converge vers un réel γ , ce qui donne $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

- Enfin, posons $v_n = H_n - \ln(n) - \gamma = u_n - \gamma$ et déterminons un équivalent de (v_n) en utilisant (encore!) une série télescopique :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{2n^2},$$

donc par sommation des relations de comparaison (cas convergent), on a, puisque $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_k = 0$:

$$v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} (v_k - v_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2},$$

et on montre facilement par comparaison série-intégrale que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$, donc finalement

$$v_n \sim \frac{1}{2n}, \text{ ce qui donne } H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On pourrait poursuivre pour calculer le terme suivant de ce développement asymptotique...

c) Formule de Stirling, développement asymptotique de $n!$

Montrons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$n! = K n^n e^{-n} \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

et donc en particulier $n! \sim K n^n e^{-n} \sqrt{n}$ (formule de Stirling).

Cela se fait en étudiant la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}.$$

- Cette fois, $u_{n+1} - u_n$ ne se simplifie pas par télescopage, donc on travaille plutôt avec des logarithmes :

$$v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \dots = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{12n^2},$$

donc la série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge. On en déduit que la suite $(\ln(u_n))$ converge vers un réel ℓ , et donc que la suite (u_n) converge vers $K = e^\ell > 0$.

- Par sommation des équivalents dans le cas des séries convergentes, on obtient l'équivalence des restes :

$$\ln(u_n) - \ell = \sum_{k=n}^{+\infty} (\ln(u_k) - \ln(u_{k+1})) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{12k^2} \sim \frac{1}{12n},$$

donc finalement :

$$\ln(u_n) = \ell + \frac{1}{12n} + o(1/n),$$

donc

$$u_n = e^{\ell + \frac{1}{12n} + o(1/n)} = Ke^{\frac{1}{12n} + o(1/n)} = K \left(1 + \frac{1}{12n} + o(1/n) \right),$$

ce qui est le résultat voulu.

Si on veut la valeur de K , il faut utiliser les *intégrales de Wallis* ($I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) dx$), et on obtient $K = \sqrt{2\pi}$ (voir les exercices).

V Dénombrabilité

Notation

Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté $\#E$ ou $\text{Card}(E)$ ou encore $|E|$. C'est un entier naturel.

Définition 28 (Ensemble dénombrable)

Un ensemble E est dit **dénombrable** s'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow E$.

Propriété 29 (Parties de \mathbb{N})

Toute partie $X \subset \mathbb{N}$ est finie ou dénombrable.

Définition 30 (Ensemble au plus dénombrable)

Un ensemble E est dit **au plus dénombrable** s'il existe une injection $i : E \rightarrow \mathbb{N}$.

Propriété 31 (Caractérisation des ensembles au plus dénombrables)

Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement si il est fini ou dénombrable.

Corollaire 32 (Parties d'un ensemble dénombrable)

Soit E un ensemble dénombrable, et $A \subset E$. Alors A est fini ou dénombrable.

Propriété 33 (Produit cartésien fini d'ensembles dénombrables)

- (i) Tout produit cartésien fini d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.
- (ii) Tout produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

Corollaire 34 (Quelques ensembles dénombrables classiques)

Les ensembles \mathbb{N}^2 , \mathbb{Z}^2 , \mathbb{Q} sont dénombrables.

Lemme 35 (Une autre caractérisation des ensembles au plus dénombrables)

Un ensemble non vide E est au plus dénombrable si et seulement si il existe une surjection $s : \mathbb{N} \rightarrow E$.

Propriété 36 (Réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables)

Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.

Propriété 37 (Non dénombrabilité de \mathbb{R})

\mathbb{R} n'est pas dénombrable.

VI Familles sommables

Dans cette section, I désigne un ensemble quelconque, le plus souvent **fini ou dénombrable**.

Le but est de donner un sens à $\sum_{i \in I} u_i$, où $(u_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres réels ou complexes.

Lorsque $I = \emptyset$, on adoptera la convention classique $\sum_{i \in \emptyset} u_i = 0$.

1) Cas des familles de réels positifs

Convention (Calculs dans $[0, +\infty]$)

On travaillera dans l'ensemble $[0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

L'opération $+$ connue sur \mathbb{R}^+ se prolonge à $[0, +\infty]$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty;$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad (+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

La relation d'ordre classique \leq se prolonge également à $[0, +\infty]$ en convenant que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad 0 \leq x < +\infty.$$

On obtient donc encore une relation d'ordre total sur $[0, +\infty]$, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty]^2, \quad (x \leq y) \text{ ou } (y \leq x).$$

Enfin, cette relation d'ordre est compatible avec la somme :

$$\forall (x, y, z, t) \in [0, +\infty]^4, \quad ((x \leq y) \text{ et } (z \leq t)) \implies x + z \leq y + t.$$

Convention (Borne supérieure infinie)

Si $A \subset \mathbb{R}^+$ est une partie non vide et non majorée de \mathbb{R} , alors on conviendra que $\sup(A) = +\infty$.

Ainsi, toute partie non vide de $[0, +\infty]$ possède une borne supérieure dans $[0, +\infty]$, et on a

$$\sup(A) < +\infty \iff A \text{ est majorée.}$$

Définition 38 (Somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. On appelle **somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$** l'élément :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{ fini}}} \sum_{i \in J} u_i.$$

C'est un élément de $[0, +\infty]$.

Définition 39 (Famille sommable de réels positifs)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est **sommable** lorsque $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$, c'est-à-dire lorsqu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour toute partie finie $J \subset I$, on a $\sum_{i \in J} u_i \leq M$.

Propriété 40 (Invariance par permutation)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$, et soit $\varphi : I \rightarrow I$ une bijection ("permutation" de I). Alors :

(i) On a l'égalité $\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\varphi(i)}$ dans $[0, +\infty]$.

(ii) En particulier, si les u_i sont dans \mathbb{R}^+ , alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\varphi(i)})_{i \in I}$ est sommable.

Propriété 41 (La sommabilité implique la dénombrabilité du support)

Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors l'ensemble $X = \{i \in I, u_i \neq 0\}$ (appelé support de la famille $(u_i)_{i \in I}$) est au plus dénombrable.

Propriété 42 (Sous-famille d'une famille sommable)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors pour toute partie $J \subset I$ (non nécessairement finie), la sous-famille $(u_i)_{i \in J}$ est sommable, et on a $\sum_{i \in J} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$.

Propriété 43 (Comparaison de familles sommables à termes positifs)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs. Si on a $u_i \leq v_i$ pour tout $i \in I$ et si $(v_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i$.

Propriété 44 (Lien avec les séries)

On suppose que $I = \mathbb{N}$. Si $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une famille (suite) de réels positifs, alors :

$$(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ est sommable} \iff \sum_{i \geq 0} u_i \text{ converge}$$

et dans ce cas, on a $\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$.

Théorème 45 (Somme par paquets pour les familles positives)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

On suppose que $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ avec les I_n deux à deux disjoints ($m \neq n \implies I_n \cap I_m = \emptyset$).

Alors, on a dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right).$$

Méthode

Grâce aux conventions de calculs avec $+\infty$, ce théorème est très simple d'utilisation : à condition de travailler avec des réels positifs, tous les calculs peuvent être menés en pratique dans $[0, +\infty]$ sans aucune justification préalable de sommabilité et on peut regrouper les termes comme on l'entend. Obtenir à la fin des calculs une somme finie justifiera a posteriori la sommabilité de la famille.

Vocabulaire

Lorsque $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ avec les I_n deux à deux disjoints, on dit que les $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forment une **pseudo-partition** de I .

Si de plus les I_n sont non vides, on parle alors de **partition**.

Corollaire 46 (Sommabilité et réindexation)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable de réels positifs. Si $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ est une bijection, alors on a

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} \text{ dans } [0, +\infty].$$

2) Cas des familles de nombres complexes

On considère maintenant des familles $(u_i)_{i \in I}$ de nombres réels ou complexes indexées par un ensemble fini ou dénombrable I .

Notation

On notera \mathbb{K}^I l'ensemble des familles $(u_i)_{i \in I}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Définition 47 (Famille sommable de nombres complexes)

Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$. On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est **sommable** lorsque $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$.

Propriété 48 (Comparaison en module)

Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ et soit $(v_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$ telle que $\forall i \in I, |u_i| \leq v_i$.

Si $(v_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable.

Définissons maintenant la somme d'une famille sommable de nombres réels (resp. complexes).

Lemme 49 (Parties positive et négative d'une famille de réels)

Soit $(u_i) \in \mathbb{R}^I$. Pour tout $i \in I$, on note

$$u_i^+ = \max(u_i, 0), \quad u_i^- = \max(-u_i, 0).$$

(i) Pour tout $i \in I$, on a $u_i^+ \geq 0, u_i^- \geq 0$, ainsi que les relations :

$$\forall i \in I, \quad u_i^+ + u_i^- = |u_i|, \quad u_i^+ - u_i^- = u_i.$$

(ii) La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si les familles de réels positifs $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ sont sommables.

Définition 50 (Somme d'une famille sommable de nombres réels)

Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ une famille sommable.

On appelle **somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$** le nombre réel :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-.$$

Lemme 51 (Parties réelle et imaginaire d'une famille de complexes)

Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$. Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(\text{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\text{Im}(u_i))_{i \in I}$ sont sommables.

Définition 52 (Somme d'une famille sommable de nombres complexes)

Soit $(u_k)_{k \in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille sommable.

On appelle **somme de la famille $(u_k)_{k \in I}$** le nombre complexe :

$$\sum_{k \in I} u_k = \sum_{k \in I} \text{Re}(u_k) + i \sum_{k \in I} \text{Im}(u_k).$$

Propriété 53 (Lien avec la convergence absolue des séries)

On suppose ici que $I = \mathbb{N}$. Si $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, alors

$$(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ est sommable} \iff \sum_{i \geq 0} u_i \text{ converge absolu},$$

et dans ce cas, on a $\sum_{i \in \mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$.

Théorème 54 (Somme par paquets pour les familles complexes)

On suppose que $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ avec les I_n deux à deux disjoints ($m \neq n \implies I_n \cap I_m = \emptyset$).

Si $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est sommable, alors :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right)$$

(avec convergence de la série).

Corollaire 55 (Somme par paquets avec une réunion finie)

On suppose $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_N$ avec les $(I_n)_{1 \leq n \leq N}$ deux à deux disjoints.

Si $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est sommable, alors :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=1}^N \left(\sum_{i \in I_n} u_i \right).$$

Corollaire 56 (Réindexation des termes d'une famille sommable)

Soit $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ (avec I dénombrable) et soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ une bijection. Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors la série $\sum_n u_{\varphi(n)}$ converge absolument et

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}.$$

Méthode

Pour appliquer ces théorèmes (somme par paquets ou réindexation dans le cas non positif), il faut au préalable **justifier la sommabilité** de la famille $(|u_i|)_{i \in I}$.

En pratique :

- On montre que $(u_i)_{i \in I}$ est sommable en **trouvant un procédé de sommation** (c'est-à-dire une pseudo-partition (I_n) de I) tel que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} |u_i| \right) < +\infty.$$

En effet, cela montre que $\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$, puisqu'on a $\sum_{i \in I} |u_i| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} |u_i| \right)$ dans $[0, +\infty]$.

- Une fois la sommabilité de (u_i) acquise, on peut "enlever les modules" et calculer la somme $\sum_{i \in I} u_i$ en sommant **suivant n'importe quel procédé** (pas forcément le même que celui utilisé pour justifier la sommabilité). On a alors, pour toute pseudo-partition (L_n) de I :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in L_n} u_i \right)$$

Il faut bien distinguer ces deux étapes lors de la rédaction !

3) Propriétés algébriques des familles sommables

I désigne un ensemble fini ou dénombrable.

Propriété 57 (Linéarité)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$.
Si $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont sommables, alors $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} (\lambda u_i + \mu v_i) = \lambda \sum_{i \in I} u_i + \mu \sum_{i \in I} v_i.$$

Corollaire 58 (Structure d'espace vectoriel des familles sommables)

L'ensemble des familles sommables est un sous-espace vectoriel de \mathbb{K}^I , et l'application $(u_i)_{i \in I} \mapsto \sum_{i \in I} u_i$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Notation

On notera $\ell^1(I, \mathbb{K})$ (ou plus simplement $\ell^1(I)$) le \mathbb{K} -espace vectoriel des familles sommables de \mathbb{K}^I .

Propriété 59 (Positivité et croissance)

- (i) Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors $\sum_{i \in I} u_i \geq 0$.
- (ii) Si $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont deux familles sommables de nombres réels, alors

$$(\forall i \in I, u_i \leq v_i) \implies \sum_{i \in I} u_i \leq \sum_{i \in I} v_i.$$

Propriété 60 (Somme nulle de termes positifs)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable et si $\sum_{i \in I} u_i = 0$, alors $u_i = 0$ pour tout $i \in I$.

Propriété 61 (Conjugaison)

Si $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable, alors $(\overline{u_i})_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} \overline{u_i} = \overline{\sum_{i \in I} u_i}$.

Propriété 62 (Inégalité triangulaire)

Si $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est sommable, alors $\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$.

VII Applications de la sommabilité aux séries

1) Permutation des termes d'une série absolument convergente

Propriété 63 (Permutation des termes d'une série absolument convergente)

Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, la série permutée $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

2) Séries doubles

Théorème 64 (Théorème de Fubini pour les familles positives)

Soit $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs. Alors on a dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} \right).$$

Théorème 65 (Théorème de Fubini pour les familles complexes)

Soit $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels ou complexes.

Si $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, alors on a

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} \right)$$

(avec convergence absolue des séries qui interviennent dans cette expression).

Méthode

Pour intervertir deux sommes infinies dans un calcul :

- si $u_{m,n} \geq 0$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, alors tous les coups sont permis (on peut permuter les sommes avec égalité des résultats dans $[0, +\infty]$) !
- sinon, on peut permuter les sommes **sous réserve de sommabilité** de $(u_{m,n})_{(m,n) \in \mathbb{N}^2}$.
Et cette sommabilité doit se vérifier en montrant par exemple que

$$\sum_m \left(\sum_n u_{m,n} \right) < +\infty$$

(ou dans l'autre sens).

3) Produit de Cauchy de deux séries

Définition 66 (Produit de Cauchy)

Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle **produit de Cauchy** des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k = \sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2, k+l=n} u_k v_l.$$

Propriété 67 (Famille produit)

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes, alors la famille $(u_k v_l)_{(k,l) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{(k,l) \in \mathbb{N}^2} u_k v_l = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) \left(\sum_{l=0}^{+\infty} v_l \right).$$

Théorème 68 (Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes)

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes, alors le produit de Cauchy $\sum w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) \left(\sum_{l=0}^{+\infty} v_l \right).$$