CH01 : Séries numériques et sommabilité

Table des matières

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
La notation $|z|$ désignera la valeur absolue de z si z est un nombre réel, ou le module de z si z est un nombre complexe.

I Généralités sur les séries numériques

Nous allons rapidement rappeler les principales notions sur les séries numériques, déjà vues en MP2I.

1) Séries, sommes partielles

Notation
$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ désigne l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire les applications $u : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$).
De telles suites u seront en général notées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement (u_n).

Définition 1 (Série à valeurs réelles ou complexes)
Etant donnée une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on appelle **série de terme général u_n** *la suite $(S_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$
Pour chaque entier n, la quantité S_n est appelée **somme partielle de rang n**.

Vocabulaire
On parle de **série numérique** car les termes u_n sont des nombres réels ou complexes. On généralisera ultérieurement pour des suites à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie E (par exemple $\mathbb{K}^n$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Remarque (Définition à partir d'un certain rang)
Si (u_n) est une suite définie seulement **à partir d'un rang n_0** $\in \mathbb{N}$, *on peut quand même définir la série de terme général u_n : c'est la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ définie par*
$$\forall n \geq n_0, \qquad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$
De toute façon, le rang à partir duquel la suite (u_n) est définie n'a pas d'importance, puisqu'on peut toujours la prolonger à $\mathbb{N}$ en posant $u_0 = u_1 = \cdots = u_{n_0-1} = 0$ (ça ne change pas les sommes partielles).

Exemple
La suite $(S_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ (pour $n \geq 1$) est appelée **série harmonique**. Ses premiers termes valent :
$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = S_2 + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \quad \ldots$$

Remarque (Relation fondamentale de récurrence)
Pour toute série définie à partir du rang n_0, on a
$$\forall n \geq n_0, \quad S_{n+1} = S_n + u_{n+1},$$
et donc on peut exprimer les termes de la suite (u_n) en fonction de ceux de la suite (S_n) :
$$\begin{cases} u_{n_0} = S_{n_0} \\ \forall n \geq n_0 + 1, \quad u_n = S_n - S_{n-1} \end{cases}$$
En effet :
$$S_{n+1} = \sum_{k=n_0}^{n+1} u_k = \underbrace{u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots + u_n}_{=S_n} + u_{n+1}.$$

2) Convergence, divergence

Définition 2 (Convergence/divergence d'une série)
On dit que la série de terme général u_n est **convergente** *lorsque la suite des sommes partielles (S_n) est convergente, c'est-à-dire lorsqu'il existe $S \in \mathbb{K}$ tel que* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$.
Le nombre $S \in \mathbb{K}$ est alors appelé **somme de la série** *et on note* $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.
Dans le cas contraire (si (S_n) diverge), on dit que **la série est divergente**.

ATTENTION !
Ne pas confondre :

- la **convergence de la suite (u_n)** (existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans $\mathbb{K}$)
- la **convergence de la série de terme général u_n** (existence de $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ dans $\mathbb{K}$).

Notation
Souvent, on désignera par $\boldsymbol{\sum u_n}$ ou par $\displaystyle\boldsymbol{\sum_{n\geq n_0} u_n}$ la série de terme général (u_n). La notation sans l'indice de départ n_0 illustre bien le fait que **la convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes**.

Remarque
En cas de convergence d'une série, le vecteur S représente donc une "somme infinie" : c'est la limite de sommes qui comportent de plus en plus de termes.

Exemple
Les séries réelles $\sum k$, $\sum 1$ et $\sum(-1)^k$ sont divergentes.
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la suite (S_n) est divergente.
- $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la suite (T_n) est divergente.
- $V_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$, donc la suite (V_n) est divergente (les sous-suites (V_{2n}) et (V_{2n+1}) sont constantes et différentes, donc elles convergent vers deux limites différentes).

ATTENTION !
Une série peut diverger **sans que** la suite (S_n) des sommes partielles tende vers $\pm\infty$! (par exemple $\sum(-1)^k$)

Exemple (Une série géométrique)
La série réelle $\displaystyle\sum \left(\frac{1}{2}\right)^k$ converge, et on a

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{1000}} + \cdots = 1.$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ donc } \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

<u>Illustration</u> : étant donné un gâteau, si on mange une moitié, puis un quart, puis un huitième, et qu'on fait ça indéfiniment (!), alors on "finira" par manger tout le gâteau.

Définition 3 (Reste d'une série convergente)
Si la série $\sum u_n$ *converge, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on pose*

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots.$$

Cette quantité s'appelle le **reste d'ordre n**.

Remarque

- *En cas de convergence d'une série, on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} R_n = 0$, *puisque* $R_n = S - S_n$ *(en notant* $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$*).*
- *En cas de* **divergence**, *le* **reste n'existe pas** *!*

3) Séries géométriques

Le premier exemple de référence est le cas des "séries géométriques", c'est-à-dire les séries de la forme $\sum q^n$ avec $q \in \mathbb{C}$. Rappelons d'abord les résultats connus sur les **suites** géométriques :

Propriété 4 (Convergence des suites géométriques)
Soit $q \in \mathbb{C}$.

(i) $\boxed{\text{Si } |q| > 1}$, *alors* (q^n) *diverge, et* $\lim\limits_{n\to+\infty} |q^n| = +\infty$.

(ii) $\boxed{\text{Si } |q| < 1}$, *alors* (q^n) *converge, et* $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

(iii) $\boxed{\text{Si } |q| = 1}$, *alors* $\begin{cases} \text{si } q = 1, \ (q^n) \text{ converge (elle est constante) ;} \\ \text{si } q \neq 1, \ (q^n) \text{ diverge (en restant bornée).} \end{cases}$

Preuve
Attention ! la suite géométrique étudiée étant a priori complexe, il faut travailler en module.

(i) Pour le cas $|q| > 1$, on écrit $|q| = 1 + \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$, puis

$$|q^n| = |q|^n = (1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k \geq n\varepsilon$$

(tous les termes étant positifs, on peut minorer la somme par le terme d'indice $k = 1$). Cette inégalité montre que $\lim\limits_{n\to+\infty} |q^n| = +\infty$.

(ii) Pour le cas $|q| < 1$:
Si $q \neq 0$, on a $\left|\dfrac{1}{q}\right| = \dfrac{1}{|q|} > 1$, donc par le point précédent, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\left(\dfrac{1}{q}\right)^n\right| = +\infty$, ce qui entraîne $\lim\limits_{n\to+\infty} |q^n| = 0$, puisque $|q^n| = \dfrac{1}{\left|\left(\frac{1}{q}\right)^n\right|}$.
Le cas $q = 0$ est quant à lui trivial.

(iii) Cas $|q| = 1$.
Si $q = 1$, la suite (q^n) est constante égale à 1 donc converge.
Si $q \neq 1$ et si (q^n) converge vers ℓ, alors en passant à la limite dans la relation $q^{n+1} = q \times q^n$,

on obtient par produit de limites $\ell = q\ell$ (puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} q^{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \ell$), c'est-à-dire $\ell = 0$ (puisque $q \neq 1$). Mais la convergence de (q^n) vers 0 est impossible, puisque $|q^n| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (q^n) diverge dans ce cas.

Etablissons maintenant le résultat qui nous intéresse (pour les **séries**) :

Théorème 5 (Convergence des séries géométriques)
Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$.
Dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Preuve
On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \in \mathbb{C}\setminus\{1\} \\ n+1 & \text{si } q = 1 \end{cases}$. Cette quantité n'admet donc une limite finie que si $|q| < 1$ (d'après la proposition précédente), et dans ce cas :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{1-q},$$

puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

<u>**ATTENTION !**</u>
Si $q = 1$, la **suite** (q^n) converge, alors que la **série** $\sum q^n$ diverge !

Corollaire 6 (Reste d'une série géométrique convergente)
Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Alors pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} q^k = \frac{q^{n_0}}{1-q}.$$

Preuve
- <u>Première méthode</u> : on ajoute et on retranche les premiers termes et on se ramène à la proposition précédente :

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} q^k = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k - \sum_{k=0}^{n_0-1} q^k = \frac{1}{1-q} - \frac{1-q^{n_0}}{1-q} = \frac{q^{n_0}}{1-q}$$

- <u>Seconde méthode</u> : par changement d'indice (qui ne modifie pas la convergence bien entendu, puisqu'il s'agit juste d'une translation). En posant $j = k - n_0$:

$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} q^k = \sum_{j=0}^{+\infty} q^{j+n_0} = q^{n_0}\sum_{j=0}^{+\infty} q^j = q^{n_0} \times \frac{1}{1-q}.$$

4) Séries de Riemann

Voici maintenant le second exemple de référence :

Théorème 7 (Séries de Riemann)
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée **série de Riemann** *d'exposant α.*
Cette série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Idée
La démonstration de ce théorème est importante, elle est basée sur les idées suivantes :

- **majorer et minorer les sommes partielles** $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$:

  $\to$ technique de **comparaison série/intégrale**, avec la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.
- **utiliser la croissance de la suite (S_n)** : il suffira de montrer que (S_n) est **majorée** pour montrer qu'elle est convergente.

Preuve
Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ pour tout entier $n \geq 1$.

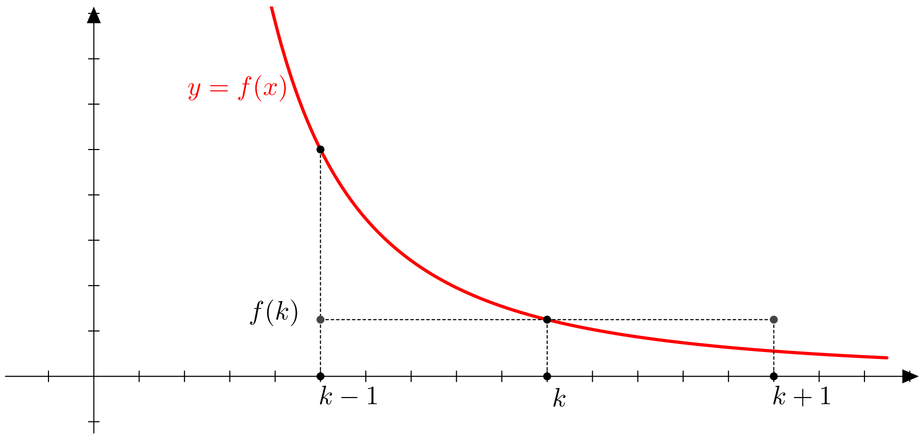
- $\boxed{\text{Cas où } \alpha \leq 0}$:

  C'est trivial car dans ce cas, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k^\alpha} \geq 1$, donc on a

  $$S_n \geq 1 + 1 + \cdots + 1 = n,$$

  ce qui montre que $S_n \to +\infty$, et donc que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- $\boxed{\text{Cas où } \alpha > 0}$:

  On a $\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0$, donc impossible de minorer "simplement" le terme général $\frac{1}{k^\alpha}$.
  Pour encadrer finement les sommes partielles, on étudie l'aire sous la courbe de la fonction f : $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ (définie et décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$).



  La décroissance de la fonction f amène l'inégalité des aires :

  $$\forall k \geq 2, \qquad \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx.$$

  (Pour le montrer rigoureusement : $\forall x \in [k-1; k]$, $f(x) \geq f(k)$, donc par croissance de l'intégrale :

  $$\int_{k-1}^{k} f(x)dx \geq \int_{k-1}^{k} f(k)dx = f(k) \times 1 = f(k);$$

  et de même, $\forall x \in [k; k+1]$, $f(x) \leq f(k)$, donc

  $$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx = f(k).)$$

  On somme ensuite l'encadrement pour k allant de 2 à n :

  $$\forall n \geq 2, \qquad \int_2^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n} f(k) \leq \int_1^{n} f(x)dx,$$

(en utilisant la relation de Chasles), c'est-à-dire

$$\forall n \geq 2, \qquad 1 + \int_2^{n+1} f(x)dx \leq S_n \leq 1 + \int_1^n f(x)dx.$$

Avantage : on sait calculer ces intégrales, alors qu'on ne sait pas calculer S_n.

$$\int f(x)dx = \int x^{-\alpha}dx = \begin{cases} \dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} + cte & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \\ \ln(x) + cte & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Des distinctions de cas apparaissent alors :

- $\boxed{\text{Si } \alpha = 1}$, alors
$$\forall n \geq 2, \qquad 1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq S_n \leq 1 + \ln(n).$$
La minoration montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, donc la série $\sum\limits_{k \geq 1} \dfrac{1}{k^\alpha}$ diverge dans ce cas.

- $\boxed{\text{Si } \alpha \neq 1}$, alors
$$\forall n \geq 2, \qquad 1 + \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leq S_n \leq 1 + \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}.$$
On peut alors conclure en fonction du signe de l'exposant $1 - \alpha$:
  * $\boxed{\text{Si } 0 < \alpha < 1}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$, ce qui montre que la série $\sum\limits_{k \geq 1} \dfrac{1}{k^\alpha}$ diverge dans ce cas.
  * $\boxed{\text{Si } \alpha > 1}$, alors on a $0 < n^{1-\alpha} \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc
  $$S_n \leq 1 + \frac{1 - n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \leq 1 + \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{\alpha - 1},$$
  ce qui montre que la suite (S_n) est majorée. Or, cette suite est également croissante, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geq 0$, donc elle converge. Ceci prouve que dans ce cas, la série $\sum\limits_{k \geq 1} \dfrac{1}{k^\alpha}$ converge.

Remarque

- *Il y a une preuve plus directe de la divergence dans le cas $\alpha = 1$ (série harmonique) : en notant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, on a*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$
donc il n'existe pas de réel S tel que $S_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} S$ (sinon, on aurait $S_{2n} - S_n \to 0$, impossible d'après la minoration).

- *Dans l'exemple des séries de Riemann, on a donc prouvé l'existence de la somme infinie $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^\alpha}$ pour les réels $\alpha > 1$, mais* **on ne connaît pas *a priori* sa valeur**.
On pourra montrer qu'on a, pour $\alpha = 2$,
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$
Ceci illustre bien le fait qu'une suite de nombres rationnels peut converger vers un irrationnel :

en effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \in \mathbb{Q},$$

mais

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi^2}{6} \notin \mathbb{Q}.$$

Comme nous l'avons vu dans les exemples fondamentaux précédents, le principal problème des séries est qu'en général, **on ne sait pas expliciter les sommes partielles** S_n (voir les séries de Riemann), hormis certains cas simples. Donc, il est nécessaire de développer des outils pour l'étude de la convergence des séries, ce que nous allons faire dans les sections suivantes.

5) Condition nécessaire de convergence

Propriété 8 (Condition nécessaire de convergence d'une série)
Si *la série* $\sum u_n$ *converge,* **alors** $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Preuve
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$, donc si $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S - S = 0$ lorsque $n \to +\infty$.

ATTENTION !
La réciproque est fausse ! On peut avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\sum u_n$ qui diverge.

Par exemple, la "série harmonique" $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, alors que $\frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Définition 9 (Divergence grossière)
On dit que la **série** $\sum u_n$ *est* **grossièrement divergente** *si son terme général* u_n *ne tend pas vers* 0 *lorsque* $n \to +\infty$.

Remarque
D'après la proposition précédente, une série grossièrement divergente est divergente.

Exemple

- La série $\sum\limits_{n\geq 0} 2^n$ est grossièrement divergente, car $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty \neq 0$.
- $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{n+2}{10n+8}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$ aussi, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+2}{10n+8} = \frac{1}{10}$ et $(-1)^n$ n'a pas de limite.
- La série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente, mais pas grossièrement divergente.

Méthode
Pour étudier la convergence d'une série, on peut donc faire le **test** *rapide suivant :* **le terme général u_n tend-il vers 0 lorsque $n \to +\infty$?**
Si non, la série est trivialement divergente (d'où l'appellation "divergence grossière"). Mais dans la plupart des cas, on aura $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui ne dit rien sur la convergence de la série ...

6) Opérations algébriques

Comme pour les suites, on dispose d'opérations algébriques sur les séries :

Propriété 10 (Opérations algébriques)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

(i) **Si** *les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent,* **alors** *la série $\sum(u_n + v_n)$ converge, et on a, pour tout entier n_0 :*
$$\sum_{k=n_0}^{\infty}(u_k + v_k) = \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} v_k.$$

(ii) **Si** *$\sum u_n$ converge,* **alors** *la série $\sum(\lambda u_n)$ converge, et on a, pour tout entier n_0 :*
$$\sum_{k=n_0}^{\infty}(\lambda u_k) = \lambda \sum_{k=n_0}^{\infty} u_k.$$

(iii) **Si** *$\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge,* **alors** *$\sum(u_n + v_n)$ diverge.*

Preuve (non traitée en classe)
On raisonne avec les suites des sommes partielles : on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} v_k$ pour $n_0 \in \mathbb{N}$ et $n \geq n_0$.
Si $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$ et $T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} T$ alors on sait bien que $S_n + T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S + T$ et $\lambda S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda S$ (ce sont les opérations algébriques sur les suites à valeurs réelles ou complexes, vues en MP2I).
Enfin, si $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$ et si (T_n) diverge, alors la suite somme $(S_n + T_n)$ diverge, sinon on aurait $S_n + T_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} W \in \mathbb{K}$, et donc $T_n = (S_n + T_n) - S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} W - S$, ce qui est faux, puisque (T_n) diverge.

Remarque
On a donc le fait suivant : toute combinaison linéaire de séries convergentes donne une série convergente, et on a dans ce cas la formule
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

ATTENTION !
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **toutes les deux divergentes**, alors on peut avoir $\sum(u_n + v_n)$ **convergente ou divergente**.

Exemple
Si $u_n = (-1)^n$ et $v_n = (-1)^{n+1}$, on a $\sum u_n$ et $\sum v_n$ (grossièrement) divergentes, et
$$\sum(u_n + u_n) = \sum 2(-1)^n \text{ diverge, et } \sum(u_n + v_n) = \sum 0 \text{ converge.}$$

ATTENTION !
Il n'y a **pas de règle simple avec le produit de séries réelles**. En effet, il n'y a *a priori* aucun lien entre la convergence de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ et celle de $\sum u_n v_n$. Et bien sûr, on a
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(u_k v_k) \neq \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right),$$
même en cas de convergence des trois séries !

Exemple
Si $u_n = v_n = \dfrac{1}{n}$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent (série de Riemann avec $\alpha = 1$).
Pourtant, $\sum u_n v_n = \sum \dfrac{1}{n^2}$ converge.

7) Téléscopage et lien suite-série

Le "téléscopage" est un **procédé de simplification de proche en proche** de certaines sommes.

Lemme 11 (Téléscopage)
Soient deux entiers naturels $n_0 \leq n$, et $(u_k) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On a :
$$\sum_{k=n_0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_{n_0}.$$

Preuve (non traitée en classe)
On sépare la somme en deux et on effectue un changement d'indice dans la première :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n_0}^{n} (u_{k+1} - u_k) &= \sum_{k=n_0}^{n} u_{k+1} - \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n_0+1}^{n+1} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k \\ &= \left(u_{n+1} + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k\right) - \left(u_{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} u_k\right) = u_{n+1} - u_{n_0}.\end{aligned}$$

(avec la convention $\sum\limits_{k=n_0+1}^{n} u_k = 0$ si $n = n_0$).

Remarque
Cette technique sert parfois à **calculer certaines sommes** *en réécrivant le terme général sous la forme $v_k = u_{k+1} - u_k$.*

Exemple (Très classique)
On considère la série $\sum \frac{1}{k(k+1)}$. Montrons qu'elle converge et calculons sa somme.
On peut décomposer le terme général en "éléments simples" : il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} = \frac{(a+b)X + a}{X(X+1)}.$$

Un calcul simple montre que $a = 1$ et $b = -1$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

(par téléscopage).

Cette identité prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, c'est-à-dire que

la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge et sa somme vaut $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

Théorème 12 (Lien suite-série)
Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors, on a l'équivalence :

$$\textit{la suite } (u_n) \textit{ converge} \iff \textit{la série } \sum (u_{n+1} - u_n) \textit{ converge.}$$

<u>ATTENTION !</u>
L'énoncé précédent **ne dit pas** que
"la suite (u_n) converge ssi la série $\sum u_n$ converge" ! (complètement faux).
Il s'agit ici de la **série téléscopique** $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et pas de $\sum u_n$.

Preuve

Notons $T_n = \sum_{k=n_0}^{n} (u_{k+1} - u_k)$ la somme partielle de rang n (pour $n \geq n_0$) de la série $\sum(u_{k+1} - u_k)$.
On va montrer que la suite (T_n) converge ssi la suite (u_n) converge. Par le lemme précédent, on a

$$\forall n \geq n_0, \qquad T_n = u_{n+1} - u_{n_0},$$

donc (puisque u_{n_0} est une constante indépendante de n), la suite (T_n) possède une limite ssi la suite (u_{n+1}) en possède une, ce qui revient à dire que (u_n) converge.

II Séries réelles à termes positifs

Dans cette section on considère des séries réelles $\sum u_n$, dont les termes u_n sont positifs à partir d'un certain rang.

1) Croissance des sommes partielles

Pour étudier la convergence des séries **à termes positifs**, on dispose de critères spécifiques, basés sur l'idée suivante :

Propriété 13 (Croissance des sommes partielles)
Si *la suite réelle* (u_n) *est* **positive** *à partir d'un certain rang* $n_0 \in \mathbb{N}$, **alors** *la suite des sommes partielles* (S_n) *est croissante à partir du rang* n_0.

Preuve
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = u_{n+1}$, et cette quantité est positive pour $n \geq n_0 - 1$. D'où $S_{n+1} \geq S_n$ pour tout $n \geq n_0$.

Remarque
Cette preuve montre même que (S_n) *est croissante à partir du rang* $n_0 - 1$, *lorsque* $n_0 \geq 1$.

Corollaire 14 (Caractérisation des séries positives convergentes)
Si *la suite réelle* (u_n) *est* **positive** *à partir d'un certain rang* $n_0 \in \mathbb{N}$, **alors** *:*

$$\sum u_n \textit{ converge} \iff \textit{la suite } (S_n) \textit{ est } \textbf{majorée}$$

("une série à termes positifs converge ssi ses sommes partielles sont majorées").

Preuve
Par la propriété précédente, la suite (S_n) est croissante à partir du rang n_0. Donc, il y a deux possibilités :

- Soit (S_n) est majorée et dans ce cas, (S_n) converge vers un réel S, c'est-à-dire que la série converge.
- Soit (S_n) n'est pas majorée, et on a alors $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ce qui entraîne la divergence de la série $\sum u_n$.

Remarque
Le corollaire se reformule de la façon suivante : pour une suite (u_n) **positive**, *on a*

$$\sum u_n \textit{ converge} \iff \textit{il existe } M > 0 \textit{ tel que } \forall n \in \mathbb{N}, u_0 + \cdots + u_n \leq M,$$

(dans cette inégalité, la constante $\boldsymbol{M}$ **ne dépend pas de** $\boldsymbol{n}$ *bien entendu ...).*

ATTENTION !
L'équivalence du corollaire 14 est fausse si on ne suppose pas (u_n) positive à partir d'un certain rang. Par exemple, en posant $u_n = (-1)^n$: on a $\sum u_n$ divergente, et pourtant, les sommes partielles S_n sont quand même majorées, puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^n \leq 1.$$

2) Comparaison de séries à termes positifs

On abrègera "série à termes positifs" en "SATP".

Théorème 15 (Critère de majoration des SATP)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui vérifient $\mathbf{0 \leq u_n \leq v_n}$ à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

(i) **Si** $\sum v_n$ *converge,* **alors** $\sum u_n$ *converge, et on a*
$$0 \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

(ii) **Si** $\sum u_n$ *diverge,* **alors** $\sum v_n$ *diverge.*

Preuve
On raisonne avec les sommes partielles $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} v_k$.
Les suites $(S_n)_{n\geq n_0}$ et $(T_n)_{n\geq n_0}$ sont croissantes (puisque u_n et v_n sont positifs pour $n \geq n_0$), et on a, en sommant les inégalités $u_k \leq v_k$:
$$\forall n \geq n_0, \qquad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} v_k,$$
c'est-à-dire $S_n \leq T_n$.
Dès lors :

(i) Si $\sum v_n$ converge, alors, par définition, $(T_n)_{n\geq n_0}$ converge (en croissant) vers un réel T (qui est donc sa borne supérieure), et on a
$$\forall n \geq n_0, \quad S_n \leq T_n \leq T.$$
Par conséquent, la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ est majorée (par T) et vu qu'elle aussi est croissante, elle converge vers un réel S, c'est-à-dire que $\sum u_n$ converge.
Enfin, en faisant tendre $n \to +\infty$ dans l'inégalité :
$$\forall n \geq n_0, \qquad \sum_{k=n_0}^{n} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{n} v_k,$$
(on peut car on a montré que les deux limites existent), on obtient l'inégalité voulue :
$$\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=n_0}^{+\infty} v_k.$$

(ii) C'est directement la contraposée du point précédent : si jamais $\sum v_n$ divergeait, alors par le point (i), on aurait $\sum u_n$ qui converge, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. Donc $\sum v_n$ diverge.

<u>ATTENTION !</u>
L'hypothèse de **positivité** est essentielle !

Exemple
Etude de la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{e^{-n}}{n^2}$.
On a $0 \leq \dfrac{e^{-n}}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$. Vu que $\displaystyle\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que $\displaystyle\sum \frac{e^{-n}}{n^2}$ converge.

Rappel (Domination, négligeabilité pour les suites numériques)
Etant données deux suites $(u_n), (v_n)$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

- $\boldsymbol{u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)}$ ("(u_n) est dominée par (v_n)") signifie :
$$\exists M > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad |u_n| \leq M|v_n|.$$
Cela revient à dire que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est bornée lorsque (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

- $\boldsymbol{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)}$ ("(u_n) est négligeable devant (v_n)") signifie qu'il existe une suite $(\varepsilon_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 0 et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq N, \quad u_n = \varepsilon_n v_n,$$
ou encore que
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad |u_n| \leq \varepsilon |v_n|.$$
Cela revient à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 0$ lorsque (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
- On n'est pas obligé d'indiquer que $n \to +\infty$ en indice, car le comportement d'une suite s'étudie toujours lorsque $n \to +\infty$.
- On a évidemment $\boxed{u_n = o(v_n) \implies u_n = O(v_n)}$, mais la réciproque est fausse.
En effet, si $u_n = o(v_n)$, on a $u_n = \varepsilon_n v_n$ à partir d'un certain rang N, avec $\varepsilon_n \to 0$. Etant convergente, la suite (ε_n) est bornée, donc il existe une constante $M > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\varepsilon_n| \leq M$, donc pour $n \geq N$, on a $|u_n| \leq M|v_n|$.

Corollaire 16 (Comparaison en O, o)
Soit (u_n), (v_n) deux suites réelles positives à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

(i) Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Preuve

(i) Supposons donc qu'il existe $M > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ |u_n| \leq M|v_n|$.
Puisqu'on a $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$, alors
$$n \geq \max(N, n_0) \implies 0 \leq u_n \leq M v_n.$$
Si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum M v_n$ converge également, donc on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que $\sum u_n$ converge.

(ii) Direct d'après (i), car $u_n = o(v_n) \implies u_n = O(v_n)$.

Exemple
Etude de la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^4 e^{-n^2}$.
En posant $u_n = n^4 e^{-n^2}$, on a $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $n^2 u_n = n^6 e^{-n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissances comparées), donc $u_n = o(1/n^2)$.
On conclut en appliquant le critère de comparaison pour les séries à termes positifs : la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum u_n$ converge.

Exemple
Etude de la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$.
En posant $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$, on a $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$, et $n^{3/2} u_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissances comparées), donc $u_n = o(1/n^{3/2})$.
On conclut en appliquant le critère de comparaison pour les séries à termes positifs : la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, donc $\sum u_n$ converge.

Rappel (Equivalence de deux suites numériques)

- Etant données deux suites $(u_n), (v_n)$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:
$\boldsymbol{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n}$ signifie qu'il existe une suite $(a_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers 1 et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \geq N, \quad u_n = a_n v_n.$$

- Cela revient à dire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$ lorsque (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
- Là non plus, on n'est pas obligé d'indiquer que $n\to+\infty$ en indice.
- IMPORTANT : $\boxed{u_n\sim v_n \iff u_n-v_n=o(v_n)}$.
  En effet,
$$\begin{aligned} u_n\sim v_n &\iff \exists(a_n)\to 1, \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ u_n=a_nv_n\\ &\iff \exists(\varepsilon_n)\to 0, \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ u_n=(1+\varepsilon_n)v_n\\ &\iff \exists(\varepsilon_n)\to 0, \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ u_n-v_n=\varepsilon_nv_n \iff u_n-v_n=o(v_n).\end{aligned}$$
- La relation "être équivalente à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$:
  Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si (v_n) est positive à partir d'un certain rang, alors (u_n) est également positive à partir d'un certain rang, puisque $a_n>0$ à partir d'un certain rang (elle tend vers 1).
  Cette propriété est l'une des questions de l'exercice 1 de la banque INP !

Théorème 17 (Critère des équivalents pour les SATP)
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles **positives** *à partir d'un certain rang et telles que* $\boldsymbol{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n}$.
Alors, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont **de même nature***, c'est-à-dire que*
$$\sum u_n \textit{ converge} \iff \sum v_n \textit{ converge.}$$

Preuve (dans la banque d'exercices INP)
Puisque les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, il existe une suite (a_n) convergeant vers 1 et un entier $N\in\mathbb{N}$ tel
$$\forall n\geq N,\qquad u_n=a_nv_n.$$
Par définition de la limite, on a alors
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists n_1\geq N,\quad n\geq n_1 \implies |a_n-1|\leq\varepsilon \implies 1-\varepsilon\leq a_n\leq 1+\varepsilon$$
(car ici toutes les suites sont supposées réelles).
En choisissant $\varepsilon=\frac{1}{2}$, on a donc $\frac{1}{2}\leq a_n\leq\frac{3}{2}$ à partir d'un certain rang n_1.
Vu que les suites u_n et v_n sont positives à partir d'un certain rang $n_0\in\mathbb{N}$, on a donc (en multipliant l'inégalité par v_n) :
$$n\geq\max(n_0,n_1) \implies 0\leq\frac{1}{2}v_n\leq u_n\leq\frac{3}{2}v_n.$$
D'après le critère de comparaison pour les séries à termes positifs (appliqué deux fois), on peut en conclure que
$$\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge },$$
puisque les constantes $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ ne changent pas la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum v_n$.
En effet :

- Si $\sum u_n$ converge, alors l'inégalité $0\leq\frac{1}{2}v_n\leq u_n$ montre que $\sum\frac{1}{2}v_n$ converge, et donc $\sum v_n$ converge.
- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum\frac{3}{2}v_n$ converge aussi, et l'inégalité $0\leq u_n\leq\frac{3}{2}v_n$ montre que $\sum u_n$ converge.

Remarque
Ce critère reste vrai si les suites sont négatives à partir d'un certain rang (la multiplication par -1 ne change pas la convergence d'une série).
En pratique, **il suffit donc seulement de vérifier qu'une des deux suites** *équivalentes (la plus simple !)* **est de signe constant strict***, cela donnera automatiquement le même signe pour l'autre (si bien sûr elle est réelle). Il est donc parfois intéressant de chercher d'abord un équivalent simple de u_n pour connaître le signe de u_n pour n suffisamment grand.*

ATTENTION !
Le critère des équivalents est faux si aucune des deux suites n'est réelle et de signe constant à partir d'un certain rang.

Exemple
Etude de la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
On a $\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}}) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$, et $\frac{1}{\sqrt{n}} > 0$ (à partir du rang $n=1$), donc d'après le critère des équivalents, $\sum \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ est de même nature que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. Or, $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente (série de Riemann avec $\alpha = 1/2$). Donc $\sum_{n\geq 1} \ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$ est divergente.

Exemple
Etude de la convergence de la série $\sum u_n$*, où* $u_n = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ \frac{1}{n} & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases}$.
On travaille sur les sommes partielles : posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_{2n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_{2n} + u_{2n+1} = 0 + \frac{1}{1} + 0 + \frac{1}{3} + \cdots + 0 + \frac{1}{2n+1},$$

donc

$$S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}.$$

Or, $\frac{1}{2k+1} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2k}$ et la série $\sum \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum \frac{1}{k}$ diverge, donc par le critère des équivalents, on en déduit que la série positive $\sum \frac{1}{2k+1}$ diverge. On en conclut que la suite (S_n) diverge, sinon sa sous-suite (S_{2n+1}) serait convergente. Donc la série $\sum u_n$ diverge.

3) Règle de d'Alembert

Propriété 18 (Règle de d'Alembert)
Soit (u_n) *une suite* **strictement positive** *à partir d'un certain rang* $n_0 \in \mathbb{N}$.
On suppose que $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}}$.
- *(i)* **Si** $0 \leq \ell < 1$, **alors** *la série* $\sum u_n$ *converge.*
- *(ii)* **Si** $\ell > 1$, **alors** *la série* $\sum u_n$ *diverge grossièrement.*
- *(iii)* **Si** $\ell = 1$, *alors on ne peut pas conclure.*

Idée
Là aussi, il s'agit d'une preuve importante. En voici les ingrédients :
- **Comparer** la suite (u_n) **à une suite géométrique** (q^n) (en encadrant $\frac{u_{n+1}}{u_n}$).
- Utiliser le critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

Preuve (dans la banque d'exercices INP)
Dans chaque cas, puisque $\ell \neq 1$, il y a "de la place" entre 1 et ℓ (même petite), et donc à partir d'un certain rang, les "quotients de d'Alembert" $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ vont se retrouver strictement d'un côté ou de l'autre de 1.

(i) $\boxed{\text{Si } 0 \leq \ell < 1}$, alors on peut écrire $\ell = 1 - \alpha$ avec $1 \geq \alpha > 0$ (la distance qui sépare ℓ de 1). Puisque par hypothèse on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \alpha$, on a alors, à partir d'un certain rang

$n_1 \geq n_0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

En multipliant par u_n (qui est strictement positif) :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_1, \qquad u_{n+1} \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) u_n.$$

Une récurrence immédiate donne alors

$$\forall n \geq n_1, \qquad u_n \leq \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{n-n_1} u_{n_1},$$

et la suite $v_n := \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{n-n_1} u_{n_1}$ est bien géométrique de raison $q := 1 - \frac{\alpha}{2} \in]0,1[$, d'où la conclusion par le critère de comparaison pour les séries à termes positifs : puisque $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

(ii) $\boxed{\text{Si } \ell > 1 \text{ et } \ell \in \mathbb{R}}$, alors on peut écrire $\ell = 1 + \alpha$, avec $\alpha > 0$, et similairement, on aura

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq n_2, \qquad u_n \geq \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{n-n_2} u_{n_2},$$

et la suite $w_n := \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)^{n-n_2} u_{n_2}$ est bien géométrique de raison $q := 1 + \frac{\alpha}{2} \in]1, +\infty[$.
Le cas où $\boxed{\ell = +\infty}$ de traite de même, car on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 2$ à partir d'un certain rang n_3, donc $u_n \geq 2^{n-n_3} u_{n_3}$ par récurrence.

(iii) Examinons l'exemple des séries de Riemann $\left(\sum u_n \text{ avec } u_n = \frac{1}{n^\alpha}\right)$: en effet, on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ (indépendamment de α), et pourtant, on sait bien que la convergence de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ dépend de la valeur de α. Dans le cas $\ell = 1$, on peut donc avoir convergence ou divergence de la série.

Exemple
Etude de la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$.

On utilise le critère de d'Alembert : en posant $u_n := \frac{1}{n!}$, on a
$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et $0 < 1$, donc $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$ converge.

ATTENTION !
L'hypothèse $\boldsymbol{u_n > 0}$ **est nécessaire** (la positivité doit être **stricte**).
Si on a seulement $u_n \geq 0$ (par exemple dans le cas où un terme sur deux est nul), alors on ne peut pas utiliser le critère de d'Alembert, puisque **les quotients** $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$ **ne seront pas définis à partir d'un certain rang**.

4) Utilisation de la comparaison série-intégrale

Lorsque f est **monotone**, on peut déterminer par comparaison série-intégrale des **encadrements des sommes partielles et/ou des restes** de la série $\sum f(k)$ (comme dans la preuve du théorème de convergence des séries de Riemann).
Par monotonie de f, on peut se ramener au cas où la suite $(f(k))$ est positive à partir d'un certain rang (quitte à changer f en $-f$).

Méthode (Comparaison série-intégrale)
Pour tout entier k*, on a si* f *est décroissante, on a*

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt,$$

alors que si f est croissante, on a

$$\int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq f(k) \leq \int_{k}^{k+1} f(t)dt.$$

Il n'y a plus qu'à sommer ces encadrements pour obtenir un encadrement de la somme partielle $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k)$ ou du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$ (dans le cas d'une série convergente).
Si les encadrements de S_n ou R_n obtenus sont assez fins (cela dépend de la rapidité de la décroissance/croissance de f), alors on peut même obtenir **un équivalent** *de S_n (si $\sum f(k)$ diverge) ou de R_n (si $\sum f(k)$ converge).*

ATTENTION !

Lorsqu'on somme les encadrements, faire attention aux indices à partir desquels les intégrales $\int_{k-1}^{k} f(t)dt$ sont bien définies.

Exemple (Equivalent de la série harmonique)
Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exemple
Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3} n^{3/2}$.

Exemple
Montrer que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

III Séries numériques quelconques

Cette fois, on considère des séries $\sum u_n$ dont le terme général u_n est à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) Convergence absolue

Définition 19 (Série absolument convergente)
Si (u_n) est une suite réelle ou complexe, on dit que la **série** $\sum u_n$ *est* **absolument convergente** *(ou "converge absolument") lorsque la série (positive) $\sum |u_n|$ est convergente.*

Remarque

- *Dans la définition précédente, $|\ \ |$ désigne la valeur absolue ou le module, selon les cas.*
- *Cette notion n'a d'intérêt que si (u_n) n'est pas réelle de signe constant !*

Théorème 20 (La convergence absolue entraîne la convergence)
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. **Si** $\sum u_n$ *converge absolument,* **alors** $\sum u_n$ *converge. En d'autres termes,*

$$\sum |u_n| \text{ converge} \implies \sum u_n \text{ converge.}$$

Preuve

- $\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{R}}$: posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n^+ = \max(u_n, 0), \qquad u_n^- = \max(-u_n, 0).$$
Les deux suites (u_n^+) et (u_n^-) sont positives, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, les décompositions :
$$u_n = u_n^+ - u_n^-, \qquad |u_n| = u_n^+ + u_n^-.$$
Si $\sum |u_n|$ converge, alors puisque
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad 0 \leq u_n^+ \leq |u_n|, \qquad 0 \leq u_n^- \leq |u_n|,$$
on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent. Par différence de séries convergentes, on obtient alors que $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$ converge.
- $\boxed{\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{C}}$: La série complexe $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries réelles $\sum Re(u_n)$ et $\sum Im(u_n)$ convergent, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \left(\sum_{k=0}^{n} Re(u_k)\right) + i \left(\sum_{k=0}^{n} Im(u_k)\right),$$
et on sait que (S_n) converge dans $\mathbb{C}$ ssi $Re(S_n)$ et $Im(S_n)$ convergent dans $\mathbb{R}$ (voir les propriétés des suites à valeurs complexes dans le cours de MP2I).
Supposons que $\sum |u_k|$ converge. Vu que $|Re(u_k)| \leq |u_k|$ et $|Im(u_k)| \leq |u_k|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit par comparaison de séries à termes positifs que $\sum |Re(u_k)|$ et $\sum |Im(u_k)|$ convergent. D'après le cas précédent ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$), cela entraîne que $\sum Re(u_k)$ et $\sum Im(u_k)$ convergent.
Donc finalement, $\sum u_k$ converge.

ATTENTION !
La réciproque est fausse : il existe des séries convergentes mais pas absolument convergentes (voir plus loin).

Méthode
Pour étudier la convergence d'une série à termes de signe non constant ou complexes, on peut **d'abord étudier la convergence absolue**.

- *Avantage : cela revient à travailler avec une* **série positive** $\sum |u_n|$, *sur laquelle on peut tester tous les critères de la partie précédente.*

- Inconvénient : *si la série ne converge pas absolument, alors ça ne montre rien quant à sa convergence.*

Exemple
La série $\sum \dfrac{e^{in}}{n^2}$ converge absolument car $\left|\frac{e^{in}}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \geq 1$ et la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.
Donc $\sum \dfrac{e^{in}}{n^2}$ converge.

Exemple (IMPORTANT : Série exponentielle)
La série "exponentielle" $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument, donc converge pour tout $z \in \mathbb{C}$.
(appliquer le critère de d'Alembert à la suite des modules $u_n = \left|\frac{z^n}{n!}\right|$ en distinguant le cas où $z = 0$).
Dans le chapitre sur les séries entières, on démontrera que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

Définition 21 (Semi-convergence)
On dit qu'une **série** *numérique* $\sum u_n$ *est* **semi-convergente** *lorsqu'elle est* **convergente mais pas absolument convergente**, *c'est-à-dire lorsque* $\sum u_n$ *converge et* $\sum |u_n|$ *diverge.*

Propriété 22 (Inégalité triangulaire infinie)
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. **Si** $\sum \boldsymbol{u_n}$ **converge absolument, alors** *on a l'inégalité suivante :*

$$\left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|.$$

Preuve
Pour tout entier naturel n, on a l'inégalité triangulaire $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|$ (voir cours MP2I).
On va passer à la limite dans cette inégalité, en justifiant la convergence des deux membres.

- A droite : Puisque $\sum u_n$ converge absolument, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|$ existe, on la note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} |u_k|$.

- A gauche : La convergence absolue entraîne la convergence, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ existe également.

  On la note $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$. Reste à justifier que

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right|$$

  Cela se fait en utilisant l'inégalité triangulaire renversée (cf. MP2I) :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \qquad \big|\, |z| - |z'| \,\big| \leq |z - z'|,$$

  qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| - \left|\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \right| \leq \left|\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On conclut alors en faisant tendre $n \to +\infty$ dans l'inégalité :
$\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} |u_k|$, c'est-à-dire $\left|\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k\right| \leq \sum\limits_{k=0}^{+\infty} |u_k|$.

Remarque
Le fait que l'on ait pu "passer la limite dans le module" signifie que l'application $z \mapsto |z|$ est continue sur $\mathbb{C}$ (voir les chapitres ultérieurs sur les espaces vectoriels normés), et ce grâce à l'inégalité triangulaire.

Propriété 23 (Comparaison en O, o)
Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et (v_n) une suite réelle positive à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$.

- (i) *Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument (donc converge).*
- (ii) *Si $u_n = o(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument (donc converge).*

Preuve

- (i) Puisque $u_n = O(v_n) \iff |u_n| = O(v_n)$, il suffit d'appliquer le corollaire 16 aux suites $(|u_n|)$ et (v_n), qui sont bien positives à partir du rang n_0.
- (ii) Idem.

Exemple
La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n)\ln(n)}{n^2}$ converge, car $\displaystyle\frac{\sin(n)\ln(n)}{n^2} = o(1/n^{3/2})$.

2) Séries alternées

Un autre cas de référence est celui des **séries alternées**, c'est-à-dire dont le terme général u_n est réel et vérifie $u_n \times u_{n+1} \leq 0$ au moins à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que chaque terme de la suite a un signe contraire au terme précédent).
De telles séries sont de la forme :

$$\pm \sum (-1)^n a_n, \qquad \text{avec } a_n \geq 0 \text{ à partir d'un certain rang.}$$

On dispose d'un résultat important sur ce type de série :

Théorème 24 (Critère spécial des séries alternées)
On considère la série $\sum (-1)^n a_n$.
Si la suite (a_n) est décroissante à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et si $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (ce qui implique la positivité de a_n à partir de n_0), alors :

- (i) *La série $\sum (-1)^n a_n$ converge.*
- (ii) *Pour tout $n \geq n_0 - 1$, le reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de son premier terme (donc $(-1)^{n+1} a_{n+1}$) et on a la majoration $|R_n| \leq a_{n+1}$.*

Remarque
La majoration du reste donne une information sur la vitesse de convergence de la série (plus vite le reste se rapproche de 0, et plus vite les sommes partielles s'approchent de la somme de la série). En pratique, elle est très utile, **il faut donc la retenir par coeur !**

Preuve (dans la banque d'exercices INP)
Posons $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} (-1)^k a_k$ pour tout $n \geq n_0$.

- (i) Pour établir la convergence de la série $\sum (-1)^n a_n$, on va montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

  Rappel
  - Deux suites réelles sont dites **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et si leur différence tend vers 0.

- **Si** deux suites sont adjacentes, **alors** elles convergent vers la même limite.

Ici, pour tout entier n tel que $2n \geq n_0$, on a

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = \sum_{k=n_0}^{2n+2} (-1)^k a_k - \sum_{k=n_0}^{2n} (-1)^k a_k = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

car la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante. Donc (S_{2n}) est décroissante.
De même, pour tout entier n tel que $2n+1 \geq n_0$, on a

$$S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} = \sum_{k=n_0}^{2n+3} (-1)^k a_k - \sum_{k=n_0}^{2n+1} (-1)^k a_k = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$$

car la suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante. Donc (S_{2n+1}) est croissante.
En outre, $S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
Donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont des suites adjacentes, elles convergent donc vers la même limite $S \in \mathbb{R}$. On en déduit que (S_n) converge vers S, car pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\exists n_1 \geq n_0, \qquad n \geq n_1 \implies |S_{2n} - S| \leq \varepsilon,$$

$$\exists n_2 \geq n_0, \qquad n \geq n_2 \implies |S_{2n+1} - S| \leq \varepsilon,$$

donc

$$n \geq \max(2n_1, 2n_2+1) \implies |S_n - S| \leq \varepsilon.$$

On a donc montré que la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

(ii) Puisque (S_{2n}) est décroissante et (S_{2n+1}) est croissante, on a $S = \sup S_{2n+1} = \inf S_{2m}$, donc pour tout $(k, m) \in \mathbb{N}$ tel que $2k+1 \geq n_0$ et $2m \geq n_0$:

$$S_{2k+1} \leq S \leq S_{2m}.$$

Cela permet d'encadrer le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k = S - S_n$:
Si $n = 2k+1$, alors $R_n = R_{2k+1} = S - S_{2k+1} \in [0, S_{2k+2} - S_{2k+1}] = [0, a_{2k+2}]$, donc

$$0 \leq R_n \leq a_{n+1},$$

et R_n est bien du signe de son premier terme $(-1)^{n+1} a_{n+1} = a_{2k+2} \geq 0$.
Si $n = 2m$, alors $R_n = R_{2m} = S - S_{2m} \in [S_{2m+1} - S_{2m}, 0] = [-a_{2m+1}, 0]$, donc

$$-a_{n+1} \leq R_n \leq 0,$$

et R_n est bien du signe de son premier terme $(-1)^{n+1} a_{n+1} = -a_{2m+1} \leq 0$.
Dans tous les cas, R_n est du signe de $(-1)^{n+1} a_{n+1}$ et $|R_n| \leq a_{n+1}$.

ATTENTION !
Ce résultat ne donne pas de la convergence absolue ! La série alternée peut être semi-convergente.

Exemple (Une série semi-convergente)
La «série harmonique alternée» $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ est convergente (d'après le critère spécial des séries alternées), mais pas absolument convergente car $\left| \dfrac{(-1)^k}{k} \right| = \dfrac{1}{k}$ et la série harmonique $\displaystyle\sum \frac{1}{k}$ diverge.
Voilà donc un exemple de série semi-convergente !
La majoration du reste du critère spécial des séries alternées permet notamment de majorer l'erreur $|S_n - S| = |R_n|$. Par exemple si on veut obtenir une valeur approchée à $\varepsilon = 10^{-3}$ de la somme $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, il suffit de calculer S_n avec n tel que $|S_n - S| = |R_n| \leq \varepsilon$.
Puisque $|R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right| \leq \frac{1}{n+1}$, il suffit d'avoir $\frac{1}{n+1} \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1 = 999$.

Exemple (Plus difficile...)

Etude de la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

Posons $u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ pour $n \geq 2$.

Puisque $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to 0$, on a $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, mais c'est inutile ici puisque $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ n'est pas de signe constant (on ne peut donc pas appliquer le critère des équivalents).

Effectuons plutôt un développement asymptotique du terme général :

$$u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Posons alors $x_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $y_n = u_n - x_n = -\dfrac{1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Etudions la convergence de ces deux séries :

- La série $\sum x_n$ n'est pas absolument convergente, mais convergente, d'après le critère spécial des séries alternées.
- Puisque $y_n \sim -\dfrac{1}{2n}$ et $y_n \in \mathbb{R}$, on obtient que y_n est de signe constant (strictement négatif) à partir d'un certain rang, donc on peut utiliser le critère des équivalents : la série $\displaystyle\sum -\frac{1}{2n}$ diverge, donc la série $\sum y_n$ diverge.

On en déduit par somme que la série $\sum u_n = \sum(x_n + y_n)$ diverge.

IV Sommation des relations de comparaison

Dans cette section, on présente des nouveaux résultats sur les séries numériques convergentes, mais aussi divergentes. Les "relations de comparaison" désignent ici o, O et $\sim$ (sous-entendu lorsque $n \to +\infty$ bien entendu).

1) Cas convergent

Théorème 25 (Sommation des relations de comparaison, cas convergent)
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On suppose que (v_n) est positive à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et que $\sum v_n$ converge.

(i) Si $u_n = O(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right).$$

(iii) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ converge et

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k.$$

Preuve

(i) Par hypothèse, il existe un réel $M > 0$ et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ |u_n| \leq M|v_n|$. Or, $v_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$, donc en posant $n_1 = \max(N, n_0)$, on a

$$n \geq n_1 \implies |u_n| \leq M v_n.$$

On en déduit que $\sum |u_n|$ converge par comparaison de séries à termes positifs, et donc que $\sum u_n$ converge. En outre,

$$n \geq n_1 \implies \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq M \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k,$$

ce qui montre que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. En raisonnant comme en (i), on obtient un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ (qui cette fois dépend de ε) tel que

$$n \geq n_1 \implies \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k\right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k,$$

ce qui montre que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.

(iii) Par hypothèse, on a $u_n - v_n = o(v_n)$, donc d'après le point (ii), la série $\sum(u_n - v_n)$ converge (absolument). Vu que $\sum v_n$ converge, on en déduit par somme que $\sum u_n$ converge, et, toujours par le point (ii) :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (u_k - v_k) = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right),$$

donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

Remarque
Le point (iii) est notamment très utile pour déterminer des équivalents de restes de séries convergentes.

2) Cas divergent

Théorème 26 (Sommation des relations de comparaison, cas divergent)
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
On suppose que (v_n) est positive à partir d'un certain rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et que $\sum v_n$ diverge.

(i) Si $u_n = O(v_n)$, alors
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

(ii) Si $u_n = o(v_n)$, alors
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right).$$

(iii) Si $u_n \sim v_n$, alors $\sum u_n$ diverge et
$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Preuve
Plus délicat que dans le cas convergent, car ici les premiers termes des sommes partielles "gênent", et il faut montrer qu'ils sont négligeables devant les termes de grands indices. Cela vient du fait que $\sum v_n$ est une série divergente à termes positifs (à partir d'un certain rang), donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} v_k = +\infty$.

(i) Par hypothèse, il existe un réel $M > 0$ et un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N,\ |u_n| \leq M|v_n|$.
Or, $v_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$, donc en posant $n_1 = \max(N, n_0)$, on a
$$n \geq n_1 \implies |u_n| \leq M v_n.$$
Pour tout $n \geq n_1$, on a donc
$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \underbrace{\left|\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k\right|}_{C_{n_1}} + \left|\sum_{k=n_1}^{n} u_k\right| \leq C_{n_1} + \sum_{k=n_1}^{n} |u_k| \leq C_{n_1} + M\sum_{k=n_1}^{n} v_k.$$
Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} M\sum_{k=n_1}^{n} v_k = +\infty$, donc il existe un entier $n_2 \geq n_1$ tel que
$$n \geq n_2 \implies M\sum_{k=n_1}^{n} v_k \geq C_{n_1} \implies \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq 2M\sum_{k=n_1}^{n} v_k.$$
Attention, pour conclure, on ne peut pas directement majorer $\sum_{k=n_1}^{n} v_k$ par $\sum_{k=0}^{n} v_k$ puisque les (v_k) ne sont pas nécessairement positifs avant le rang n_1 ! On contourne le problème de la façon suivante :
$$\sum_{k=n_1}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n} v_k - \sum_{k=0}^{n_1-1} v_k,$$

et puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} v_k = +\infty$, il existe un entier $n_3 \geq n_2$ tel que

$$n \geq n_3 \implies \sum_{k=0}^{n} v_k \geq \left|\sum_{k=0}^{n_1-1} v_k\right| \implies \sum_{k=n_1}^{n} v_k \leq 2\sum_{k=0}^{n} v_k,$$

donc

$$n \geq n_3 \implies \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq 4M\sum_{k=0}^{n} v_k,$$

ce qui montre bien que $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = O\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$.

(ii) Soit $\varepsilon > 0$. En travaillant avec $\varepsilon' = \varepsilon/4$, le point (i) montre qu'il existe un entier n_3 tel que

$$n \geq n_3 \implies \left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq 4\varepsilon'\sum_{k=0}^{n} v_k = \varepsilon\sum_{k=0}^{n} v_k,$$

donc $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = o\left(\sum\limits_{k=0}^{n} v_k\right)$.

(iii) Par hypothèse, on a $u_n - v_n = o(v_n)$, donc d'après le point (ii) :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} v_k = \sum_{k=0}^{n}(u_k - v_k) = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_k\right),$$

donc $\sum\limits_{k=0}^{n} u_k \sim \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$ (et au passage, la série $\sum u_n$ diverge tout comme $\sum v_n$).

Remarque
Le point (iii) est notamment très utile pour déterminer des équivalents de sommes partielles de séries divergentes.

3) Applications classiques

a) Lemme de Cesàro

Lemme 27 (Lemme de Cesàro)
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $u_n \to \ell \in \mathbb{K}$, alors en posant $M_n = \frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on dit que (M_n) est la suite des moyennes de Cesàro), on a aussi $M_n \to \ell$.

Preuve
On a $u_n - \ell = o(1)$ (être négligeable devant 1 signifie tendre vers 0) et $\sum 1$ diverge, donc d'après le théorème de sommation des relations de comparaison (cas divergent) :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell) = o\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right),$$

c'est-à-dire $(n+1) \times (M_n - \ell) = o(n+1)$, donc en divisant par $n+1$, on obtient $M_n - \ell = o(1)$, CQFD.

Remarque

- *Mieux vaut connaître la démonstration directe du lemme de Cesàro (avec des ε). Voir les exercices de MP2I.*
- *Ca marche aussi avec une limite infinie : si (u_n) est réelle et $u_n \to +\infty$, alors $M_n \to +\infty$ (se montre à la main en minorant).*

b) Développement asymptotique à 3 termes de la série harmonique

En utilisant la sommation des relations de comparaison, on va montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\boxed{H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right).}$$

- Tout d'abord, $\frac{1}{k} \sim \ln(1+1/k) = \ln(k+1) - \ln(k)$, et la série téléscopique $\sum(\ln(k+1) - \ln(k))$ diverge (puisque la suite $(\ln(k))$ diverge), donc d'après le théorème de sommation des relations de comparaison (cas divergent), on a

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1) - \ln(k)) = \ln(n+1) = \ln(n) + \ln(1+1/n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

- Posons $u_n = H_n - \ln(n)$ pour tout $n \geq 1$. Pour déterminer un équivalent de u_n, on utilise la série téléscopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+1/n) = \frac{1}{n}(1 - 1/n + o(1/n)) - (1/n - 1/(2n^2) + o(1/n)) \sim -1/(2n^2),$$

  donc la série téléscopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, et donc la suite (u_n) converge vers un réel γ, ce qui donne $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

- Enfin, posons $v_n = H_n - \ln(n) - \gamma = u_n - \gamma$ et déterminons un équivalent de (v_n) en utilisant (encore !) une série téléscopique :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{2n^2},$$

  donc par sommation des relations de comparaison (cas convergent), on a, puisque $\lim_{k\to+\infty} v_k = 0$:

$$v_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(v_k - v_{k+1}) \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2k^2},$$

  et on montre facilement par comparaison série-intégrale que $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$, donc finalement $v_n \sim \frac{1}{2n}$, ce qui donne $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On pourrait poursuivre pour calculer le terme suivant de ce développement asymptotique...

Remarque

- *Le réel* $\gamma = \lim_{n\to+\infty}(H_n - \ln(n))$ *s'appelle la* **constante d'Euler**.
- *On peut montrer par comparaison série intégrale que* $1 \geq \gamma \geq 1 - \ln(2) > 0$ *:*
  on obtient l'encadrement $\ln(n+1) + 1 - \ln(2) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$ *valable pour tout* $n \geq 1$ *et on passe à la limite.*
- *On peut également montrer que* $(u_n)_{n\geq1} = (H_n - \ln(n))_{n\geq1}$ *est décroissante :*

$$\forall n \geq 1, \qquad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leq 0,$$

  en utilisant l'inégalité de convexité $\ln(1+x) \leq x$*, valable pour tout réel* $x > -1$ *(voir cours MP2I).*

c) Formule de Stirling, développement asymptotique de $n!$

Montrons qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\boxed{n! = Kn^n e^{-n}\sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right),}$$

et donc en particulier $\boxed{n! \sim K n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ (*formule de Stirling*).
Cela se fait en étudiant la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}.$$

- Cette fois, $u_{n+1} - u_n$ ne se simplifie pas par téléscopage, donc on travaille plutôt avec des logarithmes :
$$v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \cdots = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{12n^2},$$
donc la série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge. On en déduit que la suite $(\ln(u_n))$ converge vers un réel ℓ, et donc que la suite (u_n) converge vers $K = e^\ell > 0$.
- Par sommation des équivalents dans le cas des séries convergentes, on obtient l'équivalence des restes :
$$\ln(u_n) - \ell = \sum_{k=n}^{+\infty}(\ln(u_k) - \ln(u_{k+1})) \sim \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{12k^2} \sim \frac{1}{12n},$$
donc finalement :
$$\ln(u_n) = \ell + \frac{1}{12n} + o(1/n),$$
donc
$$u_n = e^{\ell + \frac{1}{12n} + o(1/n)} = K e^{\frac{1}{12n} + o(1/n)} = K\left(1 + \frac{1}{12n} + o(1/n)\right),$$
ce qui est le résultat voulu.

Si on veut la valeur de K, il faut utiliser les *intégrales de Wallis* ($I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n(x)dx$), et on obtient $K = \sqrt{2\pi}$ (voir les exercices).

V Dénombrabilité

Rappel (Notion d'ensemble fini et de cardinal)
Un ensemble E est dit **fini** s'il est vide ou s'il existe un entier $N \geq 1$ et une bijection $\varphi : [\![1, N]\!] \to E$. Dans ce cas, l'entier N est unique, s'appelle le **cardinal** de E, Par convention, on pose $[\![1, N]\!] = \emptyset$ lorsque $N = 0$, et on convient que l'ensemble $\emptyset$ est de cardinal 0.
Un ensemble est dit **infini** s'il n'est pas fini.

Notation
Le cardinal d'un ensemble fini E sera noté $\#E$ ou $Card(E)$ ou encore $|E|$. C'est un entier naturel.

Définition 28 (Ensemble dénombrable)
Un ensemble E est dit **dénombrable** *s'il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to E$.*

Remarque

- *E est dénombrable si on peut énumérer ses éléments comme une suite :*
$$E = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$$
(en posant $x_i = \varphi(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$).
Un ensemble dénombrable est donc infini, mais la réciproque est fausse. Il existe en effet des ensembles infinis "trop gros" pour que l'on puisse "compter leurs éléments".
- *Une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to E$ est appelée une* **énumération** *de E (ou "numérotation" de E).*
- *E est dénombrable si et seulement si il existe une bijection $\psi : E \to \mathbb{N}$*
(cela vient du fait que l'application réciproque d'une bijection est aussi une bijection).
- *Soit E un ensemble dénombrable et F un ensemble quelconque. Alors : F est dénombrable si et seulement si il existe une bijection entre E et F (cela vient du fait que la composée de deux bijections en est une).*

Exemple (Quelques ensembles dénombrables)

- $\mathbb{N}$ est dénombrable. En effet, $Id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une bijection !
- $\mathbb{N}^*$ est dénombrable. En effet $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ définie par $\varphi(n) = n + 1$ est une bijection.
La bijection réciproque $\psi : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ est définie par $\psi(k) = k - 1$.
- $\mathbb{Z}$ est dénombrable. En effet $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par
$$\varphi(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$
est une bijection.

La bijection réciproque $\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ est définie par :
$$\psi(k) = \begin{cases} 2k - 1 & \text{si } k > 0 \\ -2k & \text{si } k \leq 0 \end{cases}$$

Propriété 29 (Parties de $\mathbb{N}$)
Toute partie $X \subset \mathbb{N}$ est finie ou dénombrable.

Preuve (non traitée en classe)
Soit $X \subset \mathbb{N}$.

- Si X est majorée, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $X \subset [\![0, N]\!]$, donc X est finie.
- Sinon, on a
$$\forall N \in \mathbb{N},\ \exists p \in X, p > N.$$

Cela permet de construire une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to X$, en posant successivement :

$$\begin{cases} & \varphi(0) = \min(X), \\ & \varphi(1) = \min\{p \in X,\ p > \varphi(0)\}, \\ & \vdots \\ \forall n \geq 1, & \varphi(n) = \min\{p \in X,\ p > \varphi(n-1)\} \end{cases}$$

(cela est possible car pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{p \in X,\ p > N\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle possède un plus petit élément).
Par construction, on a $\varphi : \mathbb{N} \to X$ et φ est strictement croissante, donc injective.
Enfin, φ est surjective car pour tout $x \in X$, on a $x = \varphi(n)$ avec $n = \#\{p \in X,\ p < x\}$.

Définition 30 (Ensemble au plus dénombrable)
Un ensemble E est dit **au plus dénombrable** *s'il existe une injection $i : E \to \mathbb{N}$.*

Propriété 31 (Caractérisation des ensembles au plus dénombrables)
Un ensemble E est au plus dénombrable si et seulement si il est fini ou dénombrable.

Preuve (non traitée en classe)

$\boxed{\Longrightarrow}$ S'il existe une injection $i : E \to \mathbb{N}$, alors E est en bijection avec l'image $i(E) \subset \mathbb{N}$, qui est finie ou dénombrable d'après la prop. 29. Donc E est lui-même fini ou dénombrable.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Si E est fini de cardinal $N \in \mathbb{N}$, alors il existe une bijection $\varphi : E \to [\![1, N]\!] \subset \mathbb{N}$, donc une injection $i : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & \varphi(n) \end{cases}$.
Si E est dénombrable, alors il existe une bijection $\varphi : E \to \mathbb{N}$, qui est a fortiori injective.

Remarque
On a donc l'équivalence : E est fini ou dénombrable $\iff$ E est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Corollaire 32 (Parties d'un ensemble dénombrable)
Soit E un ensemble dénombrable, et $A \subset E$. Alors A est fini ou dénombrable.

Preuve (non traitée en classe)
Par hypothèse, il existe une bijection $\varphi : E \to \mathbb{N}$, donc en composant avec l'injection $i : \begin{cases} A & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$, on obtient une injection $\varphi \circ i : A \to \mathbb{N}$, ce qui montre que A est fini ou dénombrable d'après la propriété précédente.

Propriété 33 (Produit cartésien fini d'ensembles dénombrables)

(i) *Tout produit cartésien fini d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.*

(ii) *Tout produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.*

Remarque
Si les E_i sont finis ou dénombrables, alors $E_1 \times \cdots \times E_n$ est fini si et seulement si les E_i sont tous finis ou l'un d'entre eux est vide.

Preuve (non traitée en classe)

- Traitons le cas de deux ensembles : si E_1 et E_2 sont finis ou dénombrables, alors il existe deux injections $i_1 : E_1 \to \mathbb{N}$ et $i_2 : E_2 \to \mathbb{N}$. L'application $i : \begin{cases} E_1 \times E_2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (x, y) & \longmapsto & 2^{i_1(x)} 3^{i_2(y)} \end{cases}$ est alors injective (par unicité de la décomposition en facteurs premiers dans $\mathbb{N}$ et injectivité de i_1 et i_2). Donc $E_1 \times E_2$ est au plus dénombrable.

- On en déduit la propriété (i) par récurrence sur le nombre d'ensembles considérés.
- Lorsque les E_i sont dénombrables, ils sont infinis donc le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ est infini. Il est également au plus dénombrable d'après (i), donc $E_1 \times \cdots \times E_n$ est dénombrable.

Corollaire 34 (Quelques ensembles dénombrables classiques)
Les ensembles $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Preuve (non traitée en classe)
Pour $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Z}^2$, c'est direct d'après la prop. 33.
Pour $\mathbb{Q}$: il suffit de considérer l'application $i : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* \\ r & \longmapsto & (a,b) \end{array}\right.$, où (a,b) est l'unique couple de $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que $r = a/b$ et $a \wedge b = 1$. Cette application i est injective et $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ est dénombrable d'après la prop. 33, donc $\mathbb{Q}$ est au plus dénombrable. Or, $\mathbb{Q}$ est infini, donc il est dénombrable.

Remarque
Sans utiliser la prop. 33, on peut montrer directement que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, par exemple :

- *En observant que l'application* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (k,l) & \longmapsto & 2^k(2l+1) \end{array}\right.$ *est bijective (dessin).*
- *Ou alors en numérotant les couples (k,l) de $\mathbb{N}^2$ en les regroupant le long des droites parallèles d'équations $x+y=n$, $n\in\mathbb{N}$. On obtient la bijection* $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (k,l) & \longmapsto & \frac{(k+l)(k+l+1)}{2}+l \end{array}\right.$ *(dessin).*

On peut de même construire à la main une bijection $\mathbb{N}\to\mathbb{Z}^2$ (dessin, parcours "en escargot").

ATTENTION !
Un produit cartésien infini d'ensembles au plus dénombrables n'est pas toujours au plus dénombrable, même si c'est un produit d'ensembles finis (voir plus loin l'exemple $E = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, qui n'est pas au plus dénombrable).

Lemme 35 (Une autre caractérisation des ensembles au plus dénombrables)
Un ensemble non vide E est au plus dénombrable si et seulement si il existe une surjection $s : \mathbb{N}\to E$.

Preuve (non traitée en classe)
$\boxed{\Longrightarrow}$ Si E est au plus dénombrable, il est fini ou dénombrable.
Si E est fini et non vide, alors en notant $E = \{x_1, \cdots, x_n\}$, l'application $s : \mathbb{N}\to E$ définie par $s(k) = x_k$ si $1\leq k\leq n$ et $s(k) = x_1$ sinon (par exemple) est surjective.
Si E est dénombrable, alors on a une bijection $s : \mathbb{N}\to E$, qui est a fortiori surjective.
$\boxed{\Longleftarrow}$ Réciproquement, s'il existe une surjection $s : \mathbb{N}\to E$, alors pour tout $x\in E$, posons :

$$g(x) = \min(s^{-1}(\{x\})) = \min\{y\in\mathbb{N},\ s(y) = x\}$$

(ce minimum existe car $s^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$ par surjectivité de s).
L'application $g : E\to\mathbb{N}$ ainsi définie est injective car :

$$g(x) = g(x') \implies \min(s^{-1}(\{x\})) = \min(s^{-1}(\{x'\})) \implies s^{-1}(\{x\})\cap s^{-1}(\{x'\}) \neq \emptyset \implies x = x'.$$

Donc E est au plus dénombrable.

Propriété 36 (Réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables)
Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.

Preuve (non traitée en classe)
Soit I un ensemble (non vide) fini ou dénombrable, et $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles finis ou dénombrables. Pour tout $i\in I$, il existe une injection $f_i : E_i\to\mathbb{N}$.
Montrons alors que $\bigcup_{i\in I} E_i$ est fini ou dénombrable.

- Si tous les E_i sont vides, alors $\bigcup_{i\in I} E_i$ est vide, donc fini.
- Sinon, $\bigcup_{i\in I} E_i$ est non vide et on va utiliser le lemme précédent, en construisant une surjection d'un ensemble au plus dénombrable vers $\bigcup_{i\in I} E_i$. Pour cela, on considère :

$$C = \{(i, f_i(x)),\ i \in I,\ x \in E_i\} = \{(i, y) \in I \times \mathbb{N},\ \exists x \in E_i,\ y = f_i(x)\}.$$

C est une partie non vide de $I \times \mathbb{N}$, qui est dénombrable (comme produit cartésien de deux ensembles non vides au plus dénombrables, dont un est infini), donc C est au plus dénombrable. On construit alors l'application :

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & \bigcup_{i\in I} E_i \\ (i,y) & \longmapsto & \text{l'unique } x \in E_i \text{ tel que } y = f_i(x) \end{array} \right.$$

(ceci a bien un sens car toutes les $f_i : E_i \to \mathbb{N}$ sont injectives).
Elle est surjective car étant donné $x \in \bigcup_{i\in I} E_i$, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in E_{i_0}$, et par définition de s, on a $x = s(i_0, f_{i_0}(x))$, donc $x \in s(C)$. En composant avec une surjection $s' : \mathbb{N} \to C$ (qui existe car C est non vide et au plus dénombrable), on obtient une surjection $s \circ s' : \mathbb{N} \to \bigcup_{i\in I} E_i$, ce qui prouve que $\bigcup_{i\in I} E_i$ est au plus dénombrable.

Remarque
On retrouve ainsi le fait que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables, puisque

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}), \qquad \mathbb{Q} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} (\frac{1}{p}\mathbb{Z}).$$

Exemple (Suites binaires stationnaires)
L'ensemble

$$S = \{u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_n = 1\}$$

est dénombrable. En effet,

$$S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{(a_0, \cdots, a_{n-1}, 1, 1, 1, \cdots),\ a_i \in \{0,1\}\right\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n,$$

donc S est une réunion dénombrable d'ensembles finis (chaque S_n est de cardinal 2^n). On en déduit par la propriété précédente que S est au plus dénombrable, et il est infini, donc dénombrable.

Exemple (Suites binaires)
En revanche, l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est infini mais pas dénombrable.
S'il était dénombrable, il existerait d'après le lemme 35 une surjection $s : \mathbb{N} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Mais alors, en notant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$s(n) = (a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, \cdots, a_k^{(n)}, \cdots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}},$$

on peut considérer la suite binaire :

$$u = (1 - a_0^{(0)}, 1 - a_1^{(1)}, \cdots, 1 - a_n^{(n)}, \cdots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

(c'est le **procédé diagonal de Cantor**).
Cette suite u n'est égale à aucune des suites $s(n)$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - s(n)_n \neq s(n)_n$, donc il y a contradiction avec la surjectivité de s.

Propriété 37 (Non dénombrabilité de $\mathbb{R}$)
$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Preuve (non traitée en classe)
On utilise le fait que tout réel $x \in [0,1[$ s'écrit sous la forme :

$$x = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k 2^{-k},$$

avec les $a_k \in \{0,1\}$, et cette écriture est unique si la suite $(a_k) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne stationne pas à 1 (on l'appelle développement binaire propre du réel x, voir cours d'informatique).
L'intervalle $[0,1[$ est donc en bijection avec les suites binaires non stationnaires à 1, c'est-à-dire l'ensemble $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus S$ (avec les notations des deux exemples précédents). Puisque S est dénombrable, $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus S$ n'est pas dénombrable (sinon, la réunion $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ serait dénombrable, ce qui est faux).
Donc $[0,1[$ n'est pas dénombrable, et $\mathbb{R}$ non plus (puisqu'il le contient).

VI Familles sommables

Dans cette section, I désigne un ensemble quelconque, le plus souvent **fini ou dénombrable**.
Le but est de donner un sens à $\displaystyle\sum_{i \in I} u_i$, où $(u_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres réels ou complexes.
Lorsque $I = \emptyset$, on adoptera la convention classique $\displaystyle\sum_{i\in\emptyset} u_i = 0$.

1) Cas des familles de réels positifs

Convention (Calculs dans $[0, +\infty]$)
On travaillera dans l'ensemble $[0, +\infty] = \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.
L'opération $+$ connue sur $\mathbb{R}^+$ se prolonge à $[0, +\infty]$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty;$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad (+\infty) + (+\infty) = +\infty.$$

La relation d'ordre classique $\leq$ se prolonge également à $[0, +\infty]$ en convenant que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \qquad 0 \leq x < +\infty.$$

On obtient donc encore une relation d'ordre total sur $[0, +\infty]$, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in [0, +\infty]^2, \qquad (x \leq y) \text{ ou } (y \leq x).$$

Enfin, cette relation d'ordre est compatible avec la somme :

$$\forall (x, y, z, t) \in [0, +\infty]^4, \qquad \big((x \leq y) \text{ et } (z \leq t)\big) \implies x + z \leq y + t.$$

ATTENTION !
Cette convention un peu étrange ne doit pas faire oublier que $+\infty$ n'est pas un nombre réel !

Rappel
Si $A \subset \mathbb{R}$ est non vide et majorée (c'est-à-dire $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ x \leq M$), alors A possède une borne supérieure **dans** $\mathbb{R}$, notée $\sup(A)$. Ce réel est le plus petit des majorants de A.

Remarque
Cette propriété fondamentale fait tout l'intérêt des nombres réels par rapport à l'ensemble $\mathbb{Q}$, dans lequel la propriété est fausse. Par exemple, l'ensemble $A = \{x \in \mathbb{Q}^+,\ x^2 \leq 2\}$ est non vide mais ne possède pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$ (exercice classique de première année).

Convention (Borne supérieure infinie)
Si $A \subset \mathbb{R}^+$ est une partie non vide et non majorée de $\mathbb{R}$, alors on conviendra que $\sup(A) = +\infty$.
Ainsi, toute partie non vide de $[0, +\infty]$ possède une borne supérieure dans $[0, +\infty]$, et on a

$$\sup(A) < +\infty \iff A \text{ est majorée.}$$

Définition 38 (Somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$. On appelle **somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$** *l'élément :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{\substack{J \subset I \\ J \text{fini}}} \sum_{i\in J} u_i.$$

C'est un élément de $[0, +\infty]$.

Remarque
Bien entendu, si au moins l'un des u_i vaut $+\infty$, alors $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$, mais on va voir que la réciproque est fausse !

Définition 39 (Famille sommable de réels positifs)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est **sommable** *lorsque $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i < +\infty$, c'est-à-dire lorsqu'il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour toute partie finie $J \subset I$, on a $\displaystyle\sum_{i\in J} u_i \leq M$.*

Remarque

- *La famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable si et seulement si $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.*
  Pour une famille de réels positifs $(u_i)_{i\in I}$ (sommable ou non), la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i$ a donc toujours un sens dans $[0, +\infty]$, pour n'importe quel ensemble d'indices I.
- *Si I est fini, alors bien sûr la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.*

Propriété 40 (Invariance par permutation)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$, et soit $\varphi : I \to I$ une bijection ("permutation" de I). Alors :

(i) On a l'égalité $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\varphi(i)}$ dans $[0, +\infty]$.

(ii) En particulier, si les u_i sont dans $\mathbb{R}^+$, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\varphi(i)})_{i\in I}$ est sommable.

Preuve (traitée en MPI*)
En effet, l'ensemble des sommes finies $\displaystyle\sum_{i\in J} u_i$ coïncide avec l'ensemble des sommes finies $\displaystyle\sum_{i\in J} u_{\varphi(i)}$.

Propriété 41 (La sommabilité implique la dénombrabilité du support)
Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors l'ensemble $X = \{i \in I,\ u_i \neq 0\}$ (appelé support de la famille $(u_i)_{i\in I}$) est au plus dénombrable.

Remarque
Ainsi, on se limitera en pratique au cas où I est au plus dénombrable (car les termes d'indice hors de X sont nuls, donc sont inutiles dans la somme).

Preuve (traitée en MPI*)
En effet, on a

$$X = \{i \in I,\ u_i > 0\} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} \left\{i \in I,\ u_i > \frac{1}{p}\right\},$$

et les ensembles $X_p = \{i \in I,\ u_i > \frac{1}{p}\}$ sont finis, de cardinal $\#X_p \leq pS$, où $S = \sum_{i\in I} u_i \in \mathbb{R}^+$, car si X_p possédait au moins $\lfloor pS \rfloor + 1$ éléments (chacun plus grand que $\frac{1}{p}$), alors on aurait :

$$S = \sup_{\substack{J\subset I \\ J\text{fini}}} \sum_{i\in J} u_i \geq \frac{1}{p}(\lfloor pS \rfloor + 1) > S,$$

ce qui est contradictoire. Donc X est réunion dénombrable d'ensembles finis, ce qui montre que X est au plus dénombrable.

Propriété 42 (Sous-famille d'une famille sommable)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour toute partie $J \subset I$ (non nécessairement finie), la sous-famille $(u_i)_{i\in J}$ est sommable, et on a $\displaystyle\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$.

Preuve (non traitée en classe)
Si K est une partie finie de J, alors c'est une partie finie de I, donc en notant $S = \sum_{i\in I} u_i \in \mathbb{R}^+$, on a $\sum_{i\in K} u_i \leq S$, ce qui montre que l'ensemble des sommes sur les parties finies de J est majoré par S, donc la famille $(u_i)_{i\in J}$ est sommable, et on a :

$$\sum_{i\in J} u_i = \sup_{\substack{K\subset J\\ K \text{fini}}} \sum_{i\in K} u_i \leq S = \sum_{i\in I} u_i.$$

Propriété 43 (Comparaison de familles sommables à termes positifs)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs. Si on a $u_i \leq v_i$ pour tout $i \in I$ et si $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i$.

Preuve (non traitée en classe)
Notons $S = \sum_{i\in I} v_i \in \mathbb{R}^+$. Pour toute partie finie $J \subset I$, l'inégalité $\forall i \in I,\ u_i \leq v_i$ entraîne $\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in J} v_i \leq S$, donc $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{\substack{J\subset I\\ J \text{fini}}} \sum_{i\in J} u_i \leq S = \sum_{i\in I} v_i.$$

Propriété 44 (Lien avec les séries)
On suppose que $I = \mathbb{N}$. Si $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une famille (suite) de réels positifs, alors :

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est sommable} \iff \sum_{i\geq 0} u_i \text{ converge}$$

et dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$.

Preuve (traitée en MPI*)

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que la famille $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ soit sommable, et notons $S = \displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i \in \mathbb{R}^+$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a donc

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i\in[\![0,n]\!]} u_i \leq S,$$

puisque $[\![0,n]\!]$ est une partie finie de $\mathbb{N}$. Ainsi, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_i$ sont majorées par S, donc (par croissance des sommes partielles) $\sum u_i$ converge et par passage à la limite dans l'inégalité, on obtient :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} u_i \leq S = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i.$$

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que la série $\sum u_i$ converge. Puisque les u_i sont positifs, les sommes partielles sont majorées par $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} u_i$. Soit une partie finie $J \subset \mathbb{N}$. En notant $n = \max(J)$, on a $J \subset [\![0,n]\!]$, donc par positivité des u_i :

$$\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in[\![0,n]\!]} u_i = \sum_{i=0}^{n} u_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_i.$$

Ainsi, les sommes sur les parties finies de $\mathbb{N}$ sont majorées, ce qui montre que $(u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est sommable et $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i \leq \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$.

On a bien prouvé l'équivalence et dans le cas où la famille est sommable, l'égalité $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$.

Théorème 45 (Sommation par paquets pour les familles positives)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
On suppose que $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ avec les I_n deux à deux disjoints ($m \neq n \implies I_n \cap I_m = \emptyset$).
Alors, on a dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I_n} u_i \right).$$

Preuve hors programme

Méthode
Grâce aux conventions de calculs avec $+\infty$, ce théorème est très simple d'utilisation : à condition de travailler avec des réels positifs, tous les calculs peuvent être menés en pratique **dans $[0, +\infty]$ sans aucune justification préalable de sommabilité** *et on peut regrouper les termes comme on l'entend. Obtenir à la fin des calculs une somme finie justifiera a posteriori la sommabilité de la famille.*

Vocabulaire
Lorsque $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ avec les I_n deux à deux disjoints, on dit que les $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forment une **pseudo-partition** de I.
Si de plus les I_n sont non vides, on parle alors de **partition**.

Remarque
En choisissant une infinité de I_n vides, on obtient en particulier le cas où

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_N,$$

avec les $(I_n)_{1\leq j\leq N}$ non vides et deux à deux disjoints. On a donc dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=1}^{N} \left(\sum_{i\in I_n} u_i \right).$$

Exemple (Cas d'une famille indexée par $\mathbb{Z}$)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{Z}}$. Alors, on a dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} u_n = u_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_{-n}$$

(car on a la réunion disjointe $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \mathbb{N}^* \cup -\mathbb{N}^*$).
En particulier : $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(u_{-n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont sommables.

Exemple
Si $q \in [0, 1[$, montrer que la famille $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et calculer sa valeur.
Puisque $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une famille de réels positifs, on a par sommation par paquets dans $[0, +\infty]$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{|n|} = q^{|0|} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} q^{|n|} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} q^{|-n|} = q^0 + 2\sum_{n\in\mathbb{N}^*} q^n = 1 + \frac{2q}{1-q} = \frac{1+q}{1-q} < +\infty,$$

donc $(q^{|n|})_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et $\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^{|n|} = \frac{1+q}{1-q}$.

Exemple

Montrer que pour tout $x \in [0,1[$*, on a* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \le x^{2^{n+1}} < 1$ donc

$$\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = x^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} (x^{2^{n+1}})^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2^n(2k+1)}.$$

On en déduit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2^n(2k+1)}\right)$.

Puisque $(n,k) \mapsto 2^n(2k+1)$ est une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^*$, on a la réunion disjointe :

$$\mathbb{N}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{2^n(2k+1),\ k \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n.$$

Donc par le théorème de sommation par paquets, on a dans $[0,+\infty]$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{2^n(2k+1)}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{p\in I_n} x^p\right) = \sum_{p\in\mathbb{N}^*} x^p = \frac{x}{1-x} < +\infty.$$

On a donc bien l'égalité dans $\mathbb{R}^+$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} = \frac{x}{1-x}.$$

Corollaire 46 (Sommabilité et réindexation)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ *une famille dénombrable de réels positifs. Si* $\varphi : \mathbb{N} \to I$ *est une bijection, alors on a* $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}$ *dans* $[0,+\infty]$.

Preuve
Il suffit d'utiliser le théorème de sommation par paquets avec la décomposition $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\varphi(n)\}$.

2) Cas des familles de nombres complexes

On considère maintenant des familles $(u_i)_{i\in I}$ de nombres réels ou complexes indexées par un ensemble fini ou dénombrable I.

Notation
On notera $\mathbb{K}^I$ l'ensemble des familles $(u_i)_{i\in I}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 47 (Famille sommable de nombres complexes)
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$*. On dit que* $(u_i)_{i\in I}$ *est* **sommable** *lorsque* $\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$.

Remarque
$|\,.\,|$ *désigne la valeur absolue si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et le module si* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Par définition, $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable ssi* $(|u_i|)_{i\in I}$ *est sommable.*

ATTENTION !
On n'a pas encore défini ce qu'est la "somme" $\sum_{i\in I} u_i$ dans ce contexte plus général (on va avoir une définition pour les familles de réels et une pour les familles de complexes). Bien entendu, la définition avec la borne supérieure des sommes sur les parties finies était spécifique au contexte des familles de réels positifs, elle n'a plus cours ici.

Propriété 48 (Comparaison en module)
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ *et soit* $(v_i)_{i\in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$ *telle que* $\forall i \in I,\ |u_i| \leq v_i$.
Si $(v_i)_{i\in I}$ *est sommable, alors* $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable.*

Preuve
Direct en utilisant la prop. 43 car on compare deux familles positives.

Définissons maintenant la somme d'une famille sommable de nombres réels (resp. complexes).

Lemme 49 (Parties positive et négative d'une famille de réels)
Soit $(u_i) \in \mathbb{R}^I$. *Pour tout* $i \in I$, *on note*

$$u_i^+ = \max(u_i, 0), \qquad u_i^- = \max(-u_i, 0).$$

(i) Pour tout $i \in I$, *on a* $u_i^+ \geq 0, u_i^- \geq 0$, *ainsi que les relations :*

$$\forall i \in I, \quad u_i^+ + u_i^- = |u_i|, \quad u_i^+ - u_i^- = u_i.$$

(ii) La famille $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable si et seulement si les familles de réels positifs* $(u_i^+)_{i\in I}$ *et* $(u_i^-)_{i\in I}$ *sont sommables.*

Preuve (traitée en MPI*)

(i) Facile en distinguant les cas où $u_i \geq 0$ et $u_i < 0$.

(ii) Les inégalités

$$\forall i \in I, \qquad 0 \leq u_i^+ \leq |u_i|, \quad 0 \leq u_i^- \leq |u_i|$$

assurent que la sommabilité de (u_i) entraîne celle de (u_i^+) et (u_i^-).
Réciproquement, si (u_i^+) et (u_i^-) sont sommables, alors pour toute partie finie $J \subset I$, on a

$$\sum_{i\in J} |u_i| = \sum_{i\in J} (u_i^+ + u_i^-) = \sum_{i\in J} u_i^+ + \sum_{i\in J} u_i^- \leq \sum_{i\in I} u_i^+ + \sum_{i\in I} u_i^- < +\infty.$$

Ceci montre que les sommes $\sum_{i\in J} |u_i|$ sont majorées indépendamment de J, donc $(|u_i|)$ est sommable, c'est-à-dire (u_i) est sommable.

Définition 50 (Somme d'une famille sommable de nombres réels)
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^I$ *une famille sommable.*
On appelle **somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$** *le nombre réel :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$

<u>ATTENTION !</u>
Ici, on ne peut définir la somme **que dans le cas sommable** (alors que pour les familles de réels positifs, on pouvait toujours définir la somme dans $[0, +\infty]$).

Lemme 51 (Parties réelle et imaginaire d'une famille de complexes)
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$. *Si* $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable, alors* $(Re(u_i))_{i\in I}$ *et* $(Im(u_i))_{i\in I}$ *sont sommables.*

Preuve
Pour tout $i \in I$, $|Re(u_i)| \leq |u_i|$ et $|Im(u_i)| \leq |u_i|$, donc c'est direct.

Définition 52 (Somme d'une famille sommable de nombres complexes)
Soit $(u_k)_{k\in I} \in \mathbb{C}^I$ *une famille sommable.*
On appelle **somme de la famille $(u_k)_{k\in I}$** *le nombre complexe :*

$$\sum_{k\in I} u_k = \sum_{k\in I} Re(u_k) + i \sum_{k\in I} Im(u_k).$$

ATTENTION !
Ne jamais utiliser "i" comme indice de sommation quand on est en présence de nombres complexes !

Remarque
Là encore, si I est fini, ces deux définitions coïncident bien entendu avec la somme traditionnelle. L'intérêt est de généraliser aux cas où I est dénombrable.

Propriété 53 (Lien avec la convergence absolue des séries)
On suppose ici que $I = \mathbb{N}$. Si $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, alors

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \textit{ est sommable } \iff \sum_{i\geq 0} u_i \textit{ converge } \textbf{absolument},$$

et dans ce cas, on a $\displaystyle\sum_{i\in\mathbb{N}} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i$.

Preuve (traitée en MPI*)
Par définition :

$$(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est sommable } \iff (|u_i|)_{i\in\mathbb{N}} \text{ est sommable},$$

et d'après la prop. 44, cela revient à dire que la série à termes positifs $\sum |u_i|$ converge.
Dans ce cas, la série $\sum u_i$ est convergente, car absolument convergente.
Reste à montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} u_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: les séries à termes positifs $\sum u_i^+$ et $\sum u_i^-$ convergent (car $(u_i^+)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(u_i^-)_{i\in\mathbb{N}}$ sont sommables) et on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i = \sum_{i=0}^{+\infty}(u_i^+ - u_i^-) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i^+ - \sum_{i=0}^{+\infty} u_i^- = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i^+ - \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i^- = \sum_{i\in\mathbb{N}} u_i.$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: les séries réelles $\sum Re(u_k)$ et $\sum Im(u_k)$ convergent (car elles convergent absolument, étant donné que $(Re(u_k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(Im(u_k))_{k\in I}$ sont sommables) et on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty}(Re(u_k)+iIm(u_k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} Re(u_k)+i\sum_{k=0}^{+\infty} Im(u_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} Re(u_k)+i\sum_{k\in\mathbb{N}} Im(u_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k.$$

ATTENTION !
Même si la série $\displaystyle\sum_n u_n$ converge, il se peut que la famille (u_n) ne soit pas sommable.
C'est le cas lorsque $\displaystyle\sum_n u_n$ est semi-convergente.
Par exemple, la famille $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable puisque $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge, mais $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge grâce au critère spécial des séries alternées.

Théorème 54 (Sommation par paquets pour les familles complexes)
On suppose que $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ *avec les* I_n *deux à deux disjoints* ($m \neq n \implies I_n \cap I_m = \emptyset$).
Si $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ *est sommable, alors :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$$

(avec convergence de la série).

Preuve hors programme

Corollaire 55 (Sommation par paquets avec une réunion finie)
On suppose $I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots I_N$ *avec les* $(I_n)_{1\leq n\leq N}$ *deux à deux disjoints.*
Si $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ *est sommable, alors :*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right).$$

Preuve
Appliquer le théorème précédent avec $I_n = \emptyset$ pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{1, 2, \cdots, N\}$.

Corollaire 56 (Réindexation des termes d'une famille sommable)
Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ *(avec* I *dénombrable) et soit* $\varphi : \mathbb{N} \to I$ *une bijection. Si la famille* $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable, alors la série* $\sum_n u_{\varphi(n)}$ *converge absolument et*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)}.$$

Preuve
Appliquer le théorème de sommation par paquets (th. 54) avec la décomposition $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\varphi(n)\}$.

Méthode
Pour appliquer ces théorèmes (sommation par paquets ou réindexation dans le cas non positif), il faut au préalable **justifier la sommabilité** *de la famille* $(|u_i|)_{i\in I}$.
En pratique :

- *On montre que* $(u_i)_{i\in I}$ *est sommable en* **trouvant un procédé de sommation** *(c'est-à-dire une pseudo-partition* (I_n) *de* I*) tel que*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right) < +\infty.$$

  En effet, cela montre que $\sum_{i\in I} |u_i| < +\infty$, *puisqu'on a* $\sum_{i\in I} |u_i| = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in I_n} |u_i|\right)$ *dans* $[0, +\infty]$.

- *Une fois la sommabilité de* (u_i) *acquise, on peut "enlever les modules" et calculer la somme* $\sum_{i\in I} u_i$ *en sommant* **suivant n'importe quel procédé** *(pas forcément le même que celui utilisé pour justifier la sommabilité). On a alors, pour toute pseudo-partition* (L_n) *de* I *:*

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i\in L_n} u_i\right)$$

Il faut bien distinguer ces deux étapes lors de la rédaction !

Exemple
Soit $x \in]-1,1[$. Montrons que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n)x^n,$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.
Commençons par étudier la série de gauche : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $x^n \in]-1,1[$, donc on a

$$\frac{x^n}{1-x^n} = x^n \sum_{k=0}^{+\infty} (x^n)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{n(k+1)}$$

(convergence d'une série géométrique). On en déduit :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{n(k+1)} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} x^{nk} \right).$$

On est donc ramener à étudier la sommabilité de la famille

$$(u_{n,k}) = (x^{nk})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*},$$

afin de trouver un autre procédé de sommation qui montre l'égalité voulue.

- On applique le théorème de sommation par paquets (th. 45) à la famille de réels positifs $(|x|^{nk})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$, en utilisant la décomposition :
$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} I_n,$$
où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \{(n,k),\ k \in \mathbb{N}^*\}$ (sommation "en colonne"). On a
$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} |x|^{nk} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x|^{nk} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x|^n}{1-|x|^n} < +\infty,$$
puisque $\dfrac{|x|^n}{1-|x|^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} |x|^n$ et $|x| < 1$.
Donc la famille $(x^{nk})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est sommable.
- En appliquant le théorème de sommation par paquets (th. 54) à la famille réelle sommable $(x^{nk})_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$, on obtient d'une part que
$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} x^{nk} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} x^{nk} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$$
(en utilisant le même procédé de sommation que pour montrer la sommabilité).
Mais d'autre part, en regroupant les éléments de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ selon les valeurs du produit $p = nk$, c'est-à-dire :
$$\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* = \bigcup_{p\in\mathbb{N}^*} K_p,$$
où $K_p = \{(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ nk = p\}$, on obtient aussi :
$$\sum_{(n,k)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} x^{nk} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{(n,k)\in K_p} x^{nk} \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{(n,k)\in K_p} x^p \right) = \sum_{p=1}^{+\infty} Card(K_p) x^p = \sum_{p=1}^{+\infty} d(p)x^p$$
(il y a autant de couples (n,k) avec $nk = p$ que de diviseurs de p dans $\mathbb{N}^*$).
On en déduit l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{p=1}^{+\infty} d(p)x^p$.

3) Propriétés algébriques des familles sommables

I désigne un ensemble fini ou dénombrable.

Propriété 57 (Linéarité)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles d'éléments de $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$.
Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont sommables, alors $(\lambda u_i+\mu v_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i+\mu v_i)=\lambda\sum_{i\in I}u_i+\mu\sum_{i\in I}v_i.$$

Preuve (non traitée en classe)
Si I est fini, il n'y a rien à faire. Supposons donc I dénombrable.
Pour toute partie finie $J\subset I$, on

$$\sum_{i\in J}|\lambda u_i+\mu v_i|\leq|\lambda|\sum_{i\in J}|u_i|+|\mu|\sum_{i\in J}|v_i|\leq|\lambda|\sum_{i\in I}|u_i|+|\mu|\sum_{i\in I}|v_i|=M,$$

et M ne dépend pas de la partie finie J, donc $(\lambda u_i+\mu v_i)_{i\in I}$ est sommable.
Enfin, pour montrer l'égalité voulue, on peut réindexer I (cf. cor. 56) : en notant $\varphi:\mathbb{N}\to I$ une bijection, on a

$$\sum_{i\in I}(\lambda u_i+\mu v_i)=\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_{\varphi(n)}+\mu v_{\varphi(n)})=\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}u_{\varphi(n)}+\mu\sum_{n=0}^{+\infty}v_{\varphi(n)}=\lambda\sum_{i\in I}u_i+\mu\sum_{i\in I}v_i$$

(car les séries $\sum u_{\varphi(n)}$ et $\sum v_{\varphi(n)}$ convergent par sommabilité supposée de $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$).

Corollaire 58 (Structure d'espace vectoriel des familles sommables)
L'ensemble des familles sommables est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$, et l'application $(u_i)_{i\in I}\mapsto\sum_{i\in I}u_i$ est une forme linéaire sur cet espace vectoriel.

Preuve (non traitée en classe)
La famille nulle est sommable, et le reste figure dans la preuve de la prop. précédente.

Notation
On notera $\ell^1(I,\mathbb{K})$ (ou plus simplement $\ell^1(I)$) le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des familles sommables de $\mathbb{K}^I$.

Propriété 59 (Positivité et croissance)

(i) Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors $\sum_{i\in I}u_i\geq 0$.

(ii) Si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de nombres réels, alors

$$(\forall i\in I,\ u_i\leq v_i)\implies\sum_{i\in I}u_i\leq\sum_{i\in I}v_i.$$

Preuve (non traitée en classe)

(i) La borne supérieure de quantités positives est positive.

(ii) On applique le point (*i*) à la famille positive $(v_i-u_i)_{i\in I}$ et on conclut par linéarité de la somme.

Propriété 60 (Somme nulle de termes positifs)
Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable et si $\sum_{i\in I}u_i=0$, alors $u_i=0$ pour tout $i\in I$.

Preuve (non traitée en classe)
Evident car pour tout $j \in I$:

$$0 \leq u_j = \sum_{i \in \{j\}} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i = 0.$$

Propriété 61 (Conjugaison)
Si $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est sommable, alors $(\overline{u_i})_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} \overline{u_i} = \overline{\sum_{i \in I} u_i}$.

Preuve (non traitée en classe)
Puisque $|\overline{u_i}| = |u_i|$ et que $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable, alors $(\overline{u_i})_{i \in I}$ est sommable.
Enfin, on a $\overline{u_k} = Re(u_k) + i(-Im(u_k))$ pour tout $k \in I$, donc par définition de la somme d'une famille sommable de nombres complexes :

$$\sum_{k \in I} \overline{u_k} = \sum_{k \in I} Re(u_k) + i \sum_{k \in I} (-Im(u_k)) = \sum_{k \in I} Re(u_k) - i \sum_{k \in I} Im(u_k) = \overline{\sum_{k \in I} u_k}.$$

Propriété 62 (Inégalité triangulaire)
Si $(u_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ est sommable, alors $\left| \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \sum_{i \in I} |u_i|$.

Preuve (non traitée en classe)
Si I est fini, il n'y a rien à faire. Supposons donc I dénombrable.
Etant donné une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to I$, on a (cf. prop 56) :

$$\left| \sum_{i \in I} u_i \right| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{\varphi(n)}| = \sum_{i \in I} |u_i|.$$

VII Applications de la sommabilité aux séries

1) Permutation des termes d'une série absolument convergente

Propriété 63 (Permutation des termes d'une série absolument convergente)
Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors pour toute bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série permutée $\sum u_{\sigma(n)}$ est absolument convergente et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Preuve
Puisque $\sum u_n$ converge absolument, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable, et donc, d'après le cor. 56 (appliqué avec $I = \mathbb{N}$), on obtient que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exemple
Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une permutation (bijection). Montrons que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sigma(n)}$ converge.
En posant $u_n = \dfrac{1}{n\sigma(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{\sigma(n)^2}\right)$.
Puisque la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument, la série permutée $\sum \frac{1}{\sigma(n)^2}$ converge absolument aussi (d'après la prop. précédente), donc on conclut par comparaison de séries à termes positifs.

ATTENTION !
Si $\sum u_n$ est seulement semi-convergente, alors une permutation des termes peut modifier la valeur de la somme !

Exemple
Posons $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
La série $\sum u_n$ converge par le critère spécial des séries alternées. Notons

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} \left(\underbrace{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{N-1}}{N}}_{=S_N} \right) > 0$$

(on sait que S est du signe de son premier terme, mais on pourra montrer à l'aide des séries entières qu'en fait $S = \ln(2)$).
Considérons la permutation $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ définie par :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{4} & 3 & \mathbf{6} & \mathbf{8} & 5 & \mathbf{10} & \mathbf{12} & 7 & \cdots \end{pmatrix}$$

(on a $\sigma(3k+1) = 2k+1$, $\sigma(3k+2) = 4k+2$, $\sigma(3k+3) = 4k+4$ pour tout $k \in \mathbb{N}$).

Etudions alors la série $\sum u_{\sigma(n)}$: en notant $T_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_{\sigma(n)}$ pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$T_{3N+3} = \sum_{n=1}^{3N+3} u_{\sigma(n)} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{4N+2} - \frac{1}{4N+4},$$

soit

$$\begin{aligned} T_{3N+3} &= \left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{8}+\cdots+\left(\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{4N+2}\right)-\frac{1}{4N+4} \\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{4N+2}-\frac{1}{4N+4} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2N+1}-\frac{1}{2N+2}\right)=\frac{1}{2}S_{2N+2} \end{aligned}$$

On a donc $\lim\limits_{N\to+\infty} T_{3N+3}=\dfrac{S}{2}\neq S$.
De même :

$$T_{3N+2}=T_{3N+3}-u_{\sigma(3N+3)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{S}{2},$$

$$T_{3N+1}=T_{3N+2}-u_{\sigma(3N+2)} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{S}{2},$$

donc $\lim\limits_{N\to+\infty} T_N=\dfrac{S}{2}$, ce qui montre que la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge, mais

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \neq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

2) Séries doubles

Théorème 64 (Théorème de Fubini pour les familles positives)
Soit $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs. Alors on a dans $[0,+\infty]$:

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}\right).$$

Preuve
C'est directement une application du théorème de sommation par paquets pour les familles de réels positifs, en sommant selon la décomposition

$$\mathbb{N}^2=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(m,n),\ m\in\mathbb{N}\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{N}\times\{n\}$$

ou selon la décomposition

$$\mathbb{N}^2=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\{(m,n),\ m\in\mathbb{N}\}=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\{m\}\times\mathbb{N}$$

.

Exemple
Montrons que $\displaystyle\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n^3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\zeta(2)$.
On commence par réécrire :

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=m}^{+\infty}\frac{1}{n^3}=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}u_{m,n},$$

où $u_{m,n}=\frac{1}{n^3}$ si $n\geq m$ et $u_{m,n}=0$ sinon.
D'après le théorème de Fubini, on a dans $[0,+\infty]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}u_{m,n}\right)=\sum_{m=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_{m,n}\right),$$

c'est-à-dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

Théorème 65 (Théorème de Fubini pour les familles complexes)
Soit $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres réels ou complexes.
Si $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, alors on a

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_{m,n} \right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n} \right)$$

(avec convergence absolue des séries qui interviennent dans cette expression).

Preuve
Là aussi, c'est un cas particulier du théorème de sommation par paquets pour les familles complexes.

Méthode
Pour intervertir deux sommes infinies dans un calcul :

- *si $u_{m,n} \geq 0$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, alors tous les coups sont permis (on peut permuter les sommes avec égalité des résultats dans $[0,+\infty]$) !*
- *sinon, on peut permuter les sommes* **sous réserve de sommabilité** *de $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$.*
  Et cette sommabilité doit se vérifier en montrant par exemple que

$$\sum_m \left(\sum_n u_{m,n} \right) < +\infty$$

  (ou dans l'autre sens).

3) Produit de Cauchy de deux séries

Définition 66 (Produit de Cauchy)
Soit $(u_n), (v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle **produit de Cauchy** *des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série $\sum w_n$, où :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k = \sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2,\ k+l=n} u_k v_l.$$

Propriété 67 (Famille produit)
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes, alors la famille $(u_k v_l)_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} u_k v_l = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) \left(\sum_{l=0}^{+\infty} v_l \right).$$

Preuve
Pour tout $l \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\geq 0} |u_k v_l| = |v_l| \sum_{k\geq 0} |u_k|$ converge, et on a

$$\sum_{l\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_l| \right) = \sum_{l\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| \right) |v_l| < +\infty$$

donc, par le théorème de Fubini pour les familles positives, la famille $(u_k v_l)_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable, et par le théorème de Fubini pour les familles complexes, on en déduit :

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} u_k v_l = \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_l \right) = \sum_{l=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) v_l = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \times \sum_{l=0}^{+\infty} v_l.$$

Théorème 68 (Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes)
Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries absolument convergentes, alors le produit de Cauchy $\sum w_n$ converge absolument et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} v_l\right).$$

Preuve
Par la propriété précédente, la famille $(u_k v_l)_{(k,l)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} u_k v_l = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right)\left(\sum_{l=0}^{+\infty} v_l\right).$$

Or, en sommant par paquets selon la décomposition :

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,$$

avec $I_n = \{(k,l) \in \mathbb{N}^2,\ k+l=n\}$, on a aussi :

$$\sum_{(k,l)\in\mathbb{N}^2} u_k v_l = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{(k,l)\in I_n} u_k v_l\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n.$$

Exemple (Encore la série exponentielle)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ (qui converge absolument pour tout $x \in \mathbb{R}$ d'après la règle de d'Alembert).
On a la formule

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad f(x+y) = f(x)f(y).$$

En effet, par produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes :

$$f(x)f(y) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{y^{n-k}}{(n-k)!}\right),$$

c'est-à-dire

$$f(x)f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x+y)^n}{n!} = f(x+y).$$

On montrera à l'aide des séries de fonctions que $f(x) = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.