

CCP2017 - PSI

Un corrigé

Problème 1

Partie I - Un exemple en dimension 2

1. On a

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + t^2$$

Les valeurs propres étant les racines de χ_A ,

$$\text{Sp}(A) = \{it, -it\}$$

2. On vérifie par calcul que

$$(I_2 - A)^{-1} = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$R = \frac{1}{1+t^2} \begin{pmatrix} 1-t^2 & 2t \\ -2t & 1-t^2 \end{pmatrix}$$

Les colonnes de R sont clairement orthogonales. Leur norme vaut 1 (car $(1-t^2)^2 + 4t^2 = (1+t^2)^2$) et donc R est orthogonale. Son déterminant étant égal à 1, on en déduit que

$$R \in SO_2(\mathbb{R})$$

où $SO_n(\mathbb{R})$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n .

3. Un calcul permet de vérifier que

$$(I_2 + R_\theta)^{-1} = \frac{1}{2(1 + \cos(\theta))} \begin{pmatrix} 1 + \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 1 + \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Le calcul métriciel donne alors

$$M = \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \begin{pmatrix} 0 & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Partie II - Matrices antisymétriques et matrices orthogonales

4. On suppose $BC = CB$. En multipliant à gauche et droite par C^{-1} , on obtient immédiatement

$$C^{-1}B = BC^{-1}$$

5. On a

$${}^t(AX)\bar{X} = {}^t(\lambda X)\bar{X} = \lambda \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

et par ailleurs, en utilisant le fait que A est réelle,

$${}^t(AX)\bar{X} = {}^t X^t A \bar{X} = -{}^t X A \bar{X} = -{}^t X \overline{(A\bar{X})} = -\bar{\lambda} {}^t X \bar{X} = -\bar{\lambda} \sum_{i=1}^n |x_i|^2$$

Comme $\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0$ (car X est non nul) on a $\lambda = -\bar{\lambda}$ ce qui prouve que λ est imaginaire pur. On a ainsi

$$\text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$$

6. En particulier, -1 n'est pas valeur propre de A et $I_n + A$ est donc inversible. Comme $I_n - A$ et $I_n + A$ commutent, la question 4 donne

$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$$

On a de plus (puisque ${}^t(MN) = {}^tN{}^tN$ et ${}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}$)

$$R^tR = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n - A)^{-1}$$

Comme $(I_n - A)$ et $(I_n + A)$ commutent, on conclut que $R^tR = I_n$ et donc

$$R \in O_n(\mathbb{R})$$

7. Le déterminant étant un morphisme multiplicatif,

$$\det(R) = \frac{\det(I_n - A)}{\det(I_n + A)} = \frac{\chi_A(1)}{(-1)^n \chi_A(-1)}$$

On note k la multiplicité de 0 comme valeur propre de A (éventuellement nulle). On a donc l'existence d'un polynôme Q tel que $\chi_A = X^k Q$ et Q est sans racine réelle. On a alors $Q(1)$ et $Q(-1)$ de même signe et $\det(R)$ est du signe de $(-1)^{n-k}$. Or, $n - k$ est le degré de Q et est donc pair (car Q est un polynôme réel sans racine réelle). $\det(R)$ est donc positif.

Comme R est une matrice orthogonale,

$$\det(R) = 1$$

8. On a

$${}^tA = {}^t(I_n - R){}^t(I_n + R)^{-1} = (I_n - {}^tR)(I_n + {}^tR)^{-1} = (I_n - R^{-1})(I_n + R^{-1})^{-1}$$

Un calcul simple montre que

$$(I_n + R)(I_n - R^{-1}) = I_n + R - R^{-1} - I_n = (R - I_n)(I_n + R^{-1})$$

en multipliant par l'inverse de $(I_n + R^{-1})$ à droite et l'inverse de $(I_n + R)$ à gauche, on en déduit que

$${}^tA = (I_n + R)^{-1}(R - I_n) = -A$$

ce qui montre que A est antisymétrique.

9. Dans une base orthonormée directe de premier vecteur orientant et dirigeant l'axe, on connaît la matrice de la rotation r . En notant P la matrice de passage de la base canonique à cette base adaptée, on a $P \in O_3(\mathbb{R})$ (changement de b.o.n.) et

$$P^{-1}RP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_\theta \end{pmatrix}$$

Posons $t = \tan(\theta/2)$ (qui existe puisque $\theta \neq 0[\pi]$) et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $C = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul par blocs montre que $I_3 - B$ est inversible et que

$$(I_3 + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (I_2 + C)^{-1} \end{pmatrix}$$

puis que

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (I_2 + C)^{-1}(I_2 - C) \end{pmatrix}$$

Avec la première partie, on obtient (il faut changer B en $-B$ et donc t en $-t$ et $(I_3 + B)^{-1}$ et $(I_3 - B)$ commutent)

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-t^2}{1+t^2} & -\frac{2t}{1+t^2} \\ 0 & \frac{2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{pmatrix}$$

Or, $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos(\theta) = \cos(\theta)$ et $\frac{2t}{1+t^2} = \sin(\theta)$ et donc

$$(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B) = P^{-1}RP$$

On en déduit que

$$R = P(I_3 + B)^{-1}(I_3 - B)P^{-1} = (I_3 + A)^{-1}(I_3 - A) \text{ avec } A = PBP^{-1}$$

On conclut en remarquant que puisque B est antisymétrique et P orthogonale, A est antisymétrique.

Problème 2

Partie 1 : résultats préliminaires

10. Une intégration par partie (on dérive f et on primitive $\cos(nt)$ et on a bien deux fonctions de classe C^1 sur le segment)

$$\int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = \left[\frac{\sin(nt)}{n} f(t) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} \sin(nt) f'(t) dt$$

Le terme entre crochets est nul. On majore l'autre grossièrement :

$$\left| \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^{2\pi} |f'(t)| dt$$

Le majorant étant de limite nulle,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = 0$$

11. Par théorème fondamental appliqué à la fonction continue φ sur l'intervalle \mathbb{R} , la primitive cherchée est

$$\Phi : x \mapsto \int_0^x \varphi(t) dt$$

φ étant 2π -périodique, $\int_x^{x+2\pi} \varphi(t) dt$ ne dépend pas de x et par hypothèse, sa valeur en 0 est nulle. On en déduit que Φ est aussi 2π -périodique.

Comme Φ est continue, elle est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$. Etant 2π -périodique, elle est aussi bornée sur \mathbb{R} (avec la même borne que sur $[0, 2\pi]$).

On peut alors utiliser une intégration par partie comme plus haut.

$$\int_a^b f(t) \varphi(nt) dt = \left[\frac{1}{n} f(t) \Phi(nt) \right]_a^b - \frac{1}{n} \int_a^b f'(t) \Phi(nt) dt$$

En notant $M = \|\Phi\|_\infty$ (qui existe) on a alors

$$\left| \int_a^b f(t) \varphi(nt) dt \right| \leq \frac{M}{n} (|f(a)| + |f(b)|) + \frac{M}{n} \int_a^b |f'(t)| dt$$

Là encore le majorant est de limite nulle et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \varphi(nt) dt = 0$$

12. On a

$$\int_{\alpha}^{\beta} h(t)\varphi(nt) dt = \int_{\alpha}^{\beta} (h(t) - g(t))\varphi(nt) dt + \int_{\alpha}^{\beta} g(t)\varphi(nt) dt$$

On peut alors utiliser l'inégalité triangulaire et la croissance de l'intégrale

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} h(t)\varphi(nt) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |h(t) - g(t)| \cdot |\varphi(nt)| dt + \left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t)\varphi(nt) dt \right|$$

Comme $|h - g|$ est majorée par ε sur $[\alpha, \beta]$, on en déduit alors que

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} h(t)\varphi(nt) dt \right| \leq \|\Phi\|_{\infty} |\beta - \alpha| \varepsilon + \left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t)\varphi(nt) dt \right|$$

Soit alors f continue sur $[a, b]$. On va montrer le résultat demandé en revenant à la définition des limites (comme nous y incite le début de la question). On se donne donc $\varepsilon > 0$. Par théorème de Weierstrass, on peut trouver une fonction polynomiale P telle que $\|f - P\|_{\infty, [a, b]} \leq \varepsilon$. La question précédente donne une constante M telle que

$$\left| \int_a^b f(t)\varphi(nt) dt \right| \leq M|b - a|\varepsilon + \left| \int_a^b P(t)\varphi(nt) dt \right|$$

La question 11 montre que pour n assez grand, le second terme est en module plus petit que ε pour n assez grand. C'est à dire qu'il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \left| \int_a^b f(t)\varphi(nt) dt \right| \leq (M|b - a| + 1)\varepsilon$$

Comme $(M|b - a| + 1)$ est une constante, on a donc prouvé que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t)\varphi(nt) dt = 0$$

Dans le cas où f n'est que continue par morceaux, il existe un nombre fini de morceaux $] \alpha, \beta [$ tels que f restreinte à $] \alpha, \beta [$ soit continue et prolongeable en une fonction \tilde{f} continue sur $[\alpha, \beta]$.

On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\alpha}^{\beta} \tilde{f}(t)\varphi(nt) dt = 0$$

Remplacer \tilde{f} par f ne change pas l'intégrale. On obtient le résultat pour f sur $[a, b]$ en faisant la somme sur tous les morceaux.

13. On a $\sin^2(nt) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2nt))$ et donc

$$\int_a^b f(t) \sin^2(nt) dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(t) dt - \frac{1}{2} \int_a^b f(t) \cos(2nt) dt$$

Comme $x \mapsto \cos(2x)$ est continue, 2π -périodique et d'intégrale nulle sur $[0, 2\pi]$, le second terme est de limite nulle avec ce qui précède et ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin^2(nt) dt = \frac{1}{2} \int_a^b f(t) dt$$

Partie 2 : l'intégrale de Dirichlet

14. $t \mapsto \frac{F(t)}{t}$ étant continue sur $[a, +\infty[$, le seul problème est celui au voisinage de $+\infty$. Comme F est bornée, on a $\frac{F(t)}{t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et par comparaison aux fonctions de Riemann, $t \mapsto \frac{F(t)}{t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et finalement sur $[a, +\infty[$. A fortiori, on a existence de

$$\int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt$$

$t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ est continue sur $[a, +\infty[$ et le seul problème est donc celui au voisinage de $+\infty$. On revient ici à la définition de l'existence de l'intégrale (et on ne cherche pas à prouver l'intégrabilité). Par intégration par parties (et comme F est une primitive de f sur \mathbb{R}^+ par théorème fondamental)

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t} dt = \left[\frac{F(t)}{t} \right]_a^b + \int_a^b \frac{F(t)}{t^2} dt$$

Comme F est bornée, le terme entre crochets admet une limite (nulle) quand $b \rightarrow +\infty$. On a vu en début de question que la seconde intégrale admet aussi une limite quand $b \rightarrow +\infty$. On a donc (existence et valeur)

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = -\frac{F(a)}{a} + \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt$$

15. $t \mapsto \sin(t)/t$ est continue sur $]0, +\infty[$ et prolongeable par continuité en 0 (valeur 1). Le seul problème est au voisinage de $+\infty$. Comme $x \mapsto \int_0^x \sin(t) dt = 1 - \cos(x)$ est bornée sur \mathbb{R}^+ , on peut utiliser la question précédente pour justifier que l'intégrale existe au voisinage de ∞ et donc sur \mathbb{R}^+ .

Comme $t \mapsto 1 - \cos(t)$ est une primitive de \sin sur \mathbb{R}^+ , une intégration par partie (on travaille sur un segment de \mathbb{R}^{+*} où il n'y a pas de problème pour celle-ci) donne

$$\forall [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}, \int_a^b \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_a^b + \int_a^b \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

Comme $1 - \cos(t) = 2 \sin^2(t/2)$, on a donc

$$\forall [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}, \int_a^b \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_a^b + 2 \int_a^b \frac{\sin^2(t/2)}{t^2} dt$$

Dans l'intégrale, on pose $u = t/2$ (changement de variable affine), on a alors

$$\forall [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}, \int_a^b \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos(t)}{t} \right]_a^b + 2 \int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du$$

Le membre de gauche admet une limite quand $a \rightarrow 0$ et quand $b \rightarrow +\infty$. Il en va de même du crochet (de limite nulle, en particulier car $1 - \cos(t) \sim t^2/2$ au voisinage de 0) et en passant à la limite, on obtient l'existence de l'intégrale de $\sin^2(u)/u^2$ sur \mathbb{R}^+ avec

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$$

16. On utilise le résultat de continuité des intégrales à paramètres.

- $\forall x \in \mathbb{R}^+, t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}^+ .
- $\forall t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}^+ .
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall t \in \mathbb{R}^+, |f(t)e^{-xt}| \leq |f(t)|$. Le majorant est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Le théorème s'applique et indique que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur \mathbb{R}^+ .

17. On doit maintenant utiliser le théorème de régularité.

- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur \mathbb{R}^+ .
- $\forall t \in \mathbb{R}^+, x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^{+*} de dérivée k -ième $x \mapsto (-t)^k f(t)e^{-xt}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, t \mapsto (-t)^k f(t)e^{-xt}$ est continue sur \mathbb{R}^+ .
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}, \forall x \in [a, b], \forall t \in \mathbb{R}^+, |(-t)^k f(t)e^{-xt}| \leq |f(t)|t^k e^{-at}$. $t \mapsto t^k e^{-at}$ est continue sur \mathbb{R}^+ , de limite nulle en $+\infty$ (car $a > 0$) et donc bornée sur \mathbb{R}^+ . Le majorant est donc intégrable sur \mathbb{R}^+ (puisque continu sur \mathbb{R}^+ et $O(f(t))$ au voisinage de $+\infty$, on n'a donc pas besoin du caractère borné de f).

Le théorème s'applique et indique que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^{+*} avec

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{L}(f)^{(k)} : x \mapsto \int_0^{+\infty} (-t)^k f(t)e^{-xt} dt$$

Pour la limite de $\mathcal{L}(f)$ en $+\infty$, on va utiliser le théorème de convergence dominée via la caractérisation séquentielle. On se donne donc une suite (x_n) de limite infinie. On peut sans perte de généralité supposer que $x_n \geq 1$ pour tout n (puisque $x_n \rightarrow +\infty$). On pose alors $g_n : t \mapsto f(t)e^{-x_n t}$.

- $\forall n, g_n \in C^0(\mathbb{R}^+)$.
- $\forall t \in \mathbb{R}^+, g_n(t) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$ et la suite (g_n) est donc simplement convergente vers 0 sur \mathbb{R}^+ .
- $\forall n, \forall t \in \mathbb{R}^+, |g_n(t)| \leq |f(t)|e^{-t}$ et le majorant est intégrable sur \mathbb{R}^+ (continu sur \mathbb{R}^+ et dominé par f au voisinage de $+\infty$).

On en déduit que $\mathcal{L}(f)(x_n) \rightarrow 0$ et, par caractérisation séquentielle,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$$

18. (a) La fonction f proposée est continue sur \mathbb{R}^+ et intégrable sur \mathbb{R}^+ . On peut alors utiliser ce qui précède. $\mathcal{L}(f)$ est ainsi de classe C^∞ sur \mathbb{R}^{+*} et

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f)''(x) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-xt} dt$$

On en déduit que

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f)''(x) + \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} (t^2 + 1)f(t)e^{-xt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$$

(b) Soient α et β des fonctions de classe C^2 telles que $\alpha' \cos + \beta' \sin$. Posons alors $g = \alpha \cos + \beta \sin$. On a alors (avec l'hypothèse faite sur α, β)

$$g' = -\alpha \sin + \beta \cos, g'' = -\alpha \cos - \beta \sin - \alpha' \sin + \beta' \cos$$

et ainsi

$$g'' + g = -\alpha' \sin + \beta' \cos$$

Pour que α et β conviennent, il suffit donc que $\begin{cases} \alpha'(x) \cos(x) + \beta'(x) \sin(x) = 0 \\ -\alpha'(x) \sin(x) + \beta'(x) \cos(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$. La résolution du système montre qu'il suffit que

$$\alpha'(x) = -\frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et} \quad \beta'(x) = \frac{\cos(x)}{x}$$

Si h est continue sur \mathbb{R}^{+*} , $x \mapsto \int_1^x h(t) dt$ est une primitive de h sur \mathbb{R}^{+*} . Si, de plus, l'intégrale de h existe au voisinage de $+\infty$, on peut ajouter la constante $\int_1^{+\infty} h(t) dt$ (cela reste une primitive). $x \mapsto -\int_x^{+\infty} h(t) dt$ est ainsi aussi une primitive de h . On peut appliquer ceci avec $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ (on a prouvé l'existence de l'intégrale) et $t \mapsto \frac{\cos(t)}{t}$ (la preuve de l'existence est la même). On peut donc choisir

$$\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad \beta(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$$

On peut donc choisir $f_1(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ et $f_2(t) = -\frac{\cos(t)}{t}$.

(c) On a ainsi une solution particulière h définie par

$$h(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt$$

Le changement de variable affine $u = t - x$ donne

$$h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{x+u} du$$

(d) L'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R}^{+*} est un plan affine dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$, c'est à dire par $\text{Vect}(\cos, \sin)$. On obtient l'ensemble des solutions en ajoutant la solution particulière trouvée. Comme $\mathcal{L}(f)$ est solution sur \mathbb{R}^{+*} ,

$$\exists a, b / \forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = a \cos(x) + b \sin(x) + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

19. Soit $x > 0$. $t \mapsto \frac{\sin(t)}{x+t}$ est continue sur \mathbb{R}^+ . On peut effectuer une IPP pour obtenir

$$\forall a > 0, \int_0^a \frac{\sin(t)}{x+t} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{x+t} \right]_0^a - \int_0^a \frac{\cos(t)}{(x+t)^2} dt$$

On en déduit que

$$\forall a > 0, \left| \int_0^a \frac{\sin(t)}{x+t} dt \right| \leq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} \right) + \int_0^a \frac{dt}{(x+t)^2} \leq 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} \right)$$

Tous les termes admettent une limite quand $a \rightarrow +\infty$ et le passage à la limite donne

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt \right| \leq \frac{2}{x}$$

On conclut que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = 0$$

Comme $\mathcal{L}(f)$ est aussi de limite nulle en $+\infty$, on en conclut que $\lim_{x \rightarrow 0^+} a \cos + b \sin$ est de limite nulle en $+\infty$. En introduisant les suites $(2n\pi)$ et $(2n\pi + \pi/2)$, on en déduit que $a = b = 0$ et donc que

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$$

20. Remarquons que

$$\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} = -\frac{x \sin(t)}{t(x+t)}$$

On en déduit que

$$\forall t \geq 1, \left| \frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right| \leq |x| \frac{1}{t^2}$$

Le majorant étant intégrable sur $[1, +\infty[$, on peut intégrer ! On obtient un majorant de limite nulle quand $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt = 0$$

Par ailleurs, comme $\forall t, |\sin(t)| \leq |t|$ et comme toutes les intégrales existent (fonctions continues ou prolongeables par continuité),

$$\left| \int_0^1 \left(\frac{\sin(t)}{x+t} - \frac{\sin(t)}{t} \right) dt \right| \leq \int_0^1 \frac{x}{x+t} dt = x (\ln(x+1) - \ln(x))$$

et le majorant est de limite nulle quand $x \rightarrow 0$. Finalement,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

21. On vient de voir que $\mathcal{L}(f)(x)$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ quand $x \rightarrow 0$. Mais $\mathcal{L}(f)$ est continue en 0 et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \mathcal{L}(f)(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$$

Partie 3 : phénomène de Gibbs

22. S_n est dérivable comme somme de fonctions dérivables et

$$S'_n(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \cos((2k+1)x) = \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{i(2k+1)x} \right)$$

Si $x \notin \pi\mathbb{Z}$ alors $e^{2ix} \neq 1$ et (somme géométrique)

$$\sum_{k=0}^n e^{i(2k+1)x} = e^{ix} \frac{1 - e^{2i(n+1)x}}{1 - e^{2ix}} = e^{i(n+1)x} \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$$

On en déduit alors que

$$S'_n(x) = \frac{4}{\pi} \frac{\sin((n+1)x) \cos((n+1)x)}{\sin(x)} = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(2(n+1)x)}{\sin(x)}$$

Le membre de gauche est continu en 0 et on peut donc intégrer cette égalité sur $[0, x]$ pour tout $x \in [0, \pi]$. Comme $S_n(0) = 0$, on obtient

$$\forall x \in [0, \pi], S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)} dt$$

23. On sait que

$$\forall t \in [0, 1[, \frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-t^2)^k$$

Ainsi, en intégrant sur $[0, 1[$,

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k t^{2k} dt$$

n étant fixé, on découpe la somme en deux morceaux :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^n \int_0^1 (-1)^k t^{2k} dt + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (-t^2)^k dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} + \int_0^1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (-t^2)^k dt$$

La somme est encore géométrique et on peut écrire cela sous la forme

$$\frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = \int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} dt = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$$

On en déduit que

$$\left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \right| \leq \int_0^1 t^{2n+2} dt = \frac{1}{2n+3} \rightarrow 0$$

et ainsi

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

24. On a $\sin((2n+1)\frac{\pi}{2}) = \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n$ et donc

$$S_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

25. On a $\sin((2n+1)(\pi-x)) = \sin((2n+1)\pi - (2n+1)x) = \sin((2n+1)x)$. Il en ressort alors que

$$\forall x, S_n(\pi-x) = S_n(x)$$

On fixe maintenant $x \in]0, \pi/2]$. Comme $\frac{\sin(2(n+1)t)}{t}$ est continue sur $]0, x]$ et prolongeable par continuité en 0, on peut utiliser la question 22 pour écrire que

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^x \sin(2(n+1)t) \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt + \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{t} dt$$

$t \mapsto \frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} = \frac{t - \sin(t)}{t \sin(t)}$ est continue sur $]0, x]$ et prolongeable par continuité en 0 (équivalent à $\frac{t^3}{6t^2} \rightarrow 0$). On peut alors utiliser la question 12 avec cette fonction de $\varphi : t \mapsto \sin(2t)$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \sin(2(n+1)t) \left(\frac{1}{\sin(t)} - \frac{1}{t} \right) dt = 0$$

Par ailleurs, le changement de variable $u = 2(n+1)t$ donne

$$\int_0^x \frac{\sin(2(n+1)t)}{t} dt = \int_0^{2(n+1)x} \frac{\sin(u)}{u} du$$

Comme $x > 0$, cette quantité tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

En conclusion, on a

$$\forall x \in]0, \pi/2], \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = 1$$

26. On vient de voir que $\forall x \in]0, \pi/2], S_n(x) \rightarrow 1 = f(x)$.
 Comme $f(\pi - x) = f(x)$ et $S_n(\pi - x) = S_n(x)$, la propriété reste vraie pour $x \in]\pi/2, \pi[$.
 On a aussi $S_n(0) = 0 \rightarrow 0 = f(0)$ et $S_n(\pi) = 0 \rightarrow 0 = f(\pi)$ et la propriété est finalement valable sur $[0, \pi]$.
 Par imparité des S_n et de f , cette propriété est finalement valable sur \mathbb{R} . On a donc convergence simple sur \mathbb{R} de (S_n) .
27. On a immédiatement $\varphi_n(0) = 0 \rightarrow 0$.
 Soit maintenant $x \in]0, \pi]$. On a $\sin(\frac{x}{2n}) \sim \frac{x}{2n}$ quand $n \rightarrow +\infty$. On en déduit que $\varphi_n(x) \rightarrow \frac{\sin(x)}{x} = \varphi(x)$.
 On a montré que (φ_n) converge simplement sur $[0, \pi]$ vers φ .
28. Il est immédiat, par théorèmes d'opération, que φ est continue sur $]0, \pi/2]$. Comme $\sin(x) \sim_0 x$ on a aussi continuité en 0.
 La question 22 donne

$$S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2(n+1)}} \frac{\sin(2(n+1)t)}{\sin(t)} dt$$

Le changement de variable affine $u = 2(n+1)t$ donne

$$S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi_{n+1}(u) du$$

On veut intervertir limite et intégrale et on pense au théorème de convergence dominée.

- (φ_{n+1}) est une suite de fonctions continue sur $[0, \pi]$ qui converge simplement sur $[0, \pi]$ vers φ qui est elle même continue sur $[0, \pi]$.
- La fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ est continue sur $[0, \pi/2]$ qui est un segment. Cette fonction est donc bornée sur ce segment et atteint ses bornes. Ainsi, il existe un réel t_1 telles que

$$\forall t \in [0, \pi/2], m = \frac{\sin(t_1)}{t_1} \leq \frac{\sin(t)}{t}$$

Comme $m > 0$, on peut aussi écrire que

$$\forall t \in [0, \pi/2], 0 \leq \frac{t}{\sin(t)} \leq \frac{1}{m}$$

On va appliquer cela pour $x \in]0, \pi]$ et $n \geq 0$ à $t = \frac{x}{2(n+1)} \in [0, \pi/2]$ et le fait que pour $x \in]0, \pi]$, $0 \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0, \pi], |\varphi_{n+1}(x)| = \frac{\sin(x)}{x} \frac{x/(2(n+1))}{\sin(x/(2(n+1)))} \leq \frac{1}{m}$$

Le majorant, qui est constant, est intégrable sur $]0, \pi]$.

Le théorème s'applique et donne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx$$

Comme $f(\pi/(2(n+1))) = 1 \rightarrow 1$, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(f\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) - S_n\left(\frac{\pi}{2(n+1)}\right) \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx \right) = \frac{2}{\pi} \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

29. En utilisant le DSE de \sin , on sait que

$$\forall x \in]0, \pi], \frac{\sin(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

La relation reste vraie pour $x = 0$. La série entière qui apparaît est de rayon de convergence infini et converge donc normalement sur $[0, \pi]$. Quand on intègre sur $[0, \pi]$, on est dans le cas simple où l'on peut intervertir somme et intégrale sur un segment. ceci donne

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

Avec la question 28, on a donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$$

A nouveau, $f(\pi/(2(n+1))) = 1 \rightarrow 1$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right) - f \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right) \right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1$$

30. Posons $u_n = (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!}$. (u_n) est une suite alternée qui est de limite nulle (la série associée converge). De plus

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{\pi^2(2n+1)}{(2n+3)^2(2n+2)} \leq \frac{\pi^2}{(2n+3)^2}$$

Pour $n \geq 1$, ce quotient est ≤ 1 . La suite $(|u_n|)$ décroît donc à partir du rang 1. On en déduit que $\sum_{k \geq n} u_k$ est du signe de u_n pour $n \geq 1$. En particulier, pour $n = 4$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - \sum_{n=0}^3 (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} \geq 0$$

En particulier,

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1 \geq 2 \sum_{n=0}^3 (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)(2n+1)!} - 1$$

On peut raisonnablement penser que cette quantité est > 0.17 , ce que je ne vérifie pas et on conclut.

En particulier

$$\|S_n - f\|_{\infty,]0, \pi/2[} \geq \left(S_n \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right) - f \left(\frac{\pi}{2(n+1)} \right) \right)$$

montre que $\|S_n - f\|_{\infty,]0, \pi/2[}$ n'est pas de limite nulle. On n'a donc pas de convergence uniforme sur $]0, \pi/2[$.