E3A POLTHECH 2023

CORRIGÉ DE MATHÉMATIQUES - MP

m.laamoum@gmail.com

EXERCICE 1

Questions de cours

Soit α un réel.

1. La famille $\mathscr{E} = (1, X-\alpha, \ldots, (X-\alpha)^n)$ est libre de cardinal n donc c'et une base de E_n.

2. Soit P un polynôme de E_n. La formule de Taylor pour les polynômes donne la décomposition de P dans la base $\mathscr{E}$:

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^n$$

3. Si α est une racine d'ordre $r \in [\![1,n]\!]$ de P, alors $P^{(k)}(\alpha) = 0$ pour tout $k \in [\![0,r-1]\!]$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$, , par suite :

$$P = (X-\alpha)^r \sum_{k=r}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^{n-r}$$

Le quotient de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)^r$ est $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^{n-r}$ et le reste est nul.

4. $T : P \mapsto XP(X) - \frac{1}{n}\left(X^2-1\right)P'(X)$.
Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On a $T(P_0) = X$ et si $k \geq 1$

$$T(P_k) = X^{k+1} - \frac{k}{n}\left(X^2-1\right)X^{k-1} = \frac{n-k}{n}P_{k+1} + \frac{k}{n}P_{k-1}$$

en particulier $T(P_n) = X^{n-1}$.

5. T est linéaire . Et $\forall k \in [\![0,n]\!]$ deg $T(P_k) \leq n$, ainsi $\forall P \in E_n$ deg $T(P) \leq n$ et $T(P) \in E_n$.
Donc T est un endomorphisme de E_n.

6. D'après la question 4. on a :

$$T(P_0) = P_1, T(P_1) = \frac{n-1}{n}P_2 + \frac{1}{n}P_0, T(P_k) = \frac{n-k}{n}P_{k+1} + \frac{k}{n}P_{k-1}\ , T(P_n) = X^{n-1}$$

Donc la matrice M de T dans la base $\mathscr{B} = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n} & & & & \\ 1 & 0 & \frac{2}{n} & & \text{\Large 0} & \\ & \frac{n-1}{n} & 0 & \ddots & & \\ & & \frac{n-2}{n} & \ddots & \frac{n-1}{n} & \\ & \text{\Large 0} & & \ddots & 0 & 1 \\ & & & & \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}$$

7. .

7.1. D'après la question 4.

$$\deg P_k = \begin{cases} n-1 & \text{si } k=n \\ k+1 & \text{si } 0 \leq k \leq n-1 \end{cases}$$

Si $\deg P \in [\![0, n-1]\!]$ alors $\deg T(P) = \deg P + 1$ ce qui contredit la relation $T(P) = \lambda P(X)$ (*qui donne* $\deg T(P) = \deg P$ ou $\deg T(P) = -\infty$) .

Donc $\deg P = n$.

7.2. Soit z_0 une racine complexe de P d'ordre de multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$.

On a $P(X) = (X - z_0)^r Q(X)$ avec $Q(z_0) \neq 0$, par suite

$$P'(X) = (X - z_0)^{r-1}((X - z_0)Q'(X) + rQ'(X)).$$

De plus on a

$$T(P) = \lambda P(X) = XP(X) - \frac{1}{n}\left(X^2 - 1\right)P'(X).$$

qui s'écrit

$$(X - \lambda)P(X) = \frac{1}{n}\left(X^2 - 1\right)P'(X).$$

Ainsi

$$(X - \lambda)(X - z_0)Q(X) = \frac{1}{n}\left(X^2 - 1\right)((X - z_0)Q'(X) + rQ(X)).$$

Pour $X = z_0$ on a

$$\frac{r}{n}\left(z_0^2 - 1\right)Q'(z_0) = 0.$$

et $Q(z_0) \neq 0$ d'où $z_0^2 - 1 = 0$.

7.3. P est un polynôme réel degré n dont les racines sont 1 ou -1 donc P est de le forme $P = (X-1)^k(X+1)^{n-k}$ avec $k \in [\![0, n]\!]$.

8. On a $P = (X-1)^k(X+1)^{n-k}$ et $T(P) = \lambda P(X)$ donc

$$(X - \lambda)(X-1)^k(X+1)^{n-k} = \frac{1}{n}(k(X+1) + (n-k)(X-1))(X-1)^k(X+1)^{n-k}.$$

ce qui donne

$$(X - \lambda) = \frac{1}{n}(nX + 2k - n)$$

et $\lambda = 1 - \frac{2k}{n}$.

Ainsi $Sp_{\mathbb{R}}(T) = \left\{\lambda_k = 1 - \frac{2k}{n} , k \in [\![0, n]\!]\right\}$ et $E_{\lambda_k}(T) = \text{vect}((X-1)^k(X+1)^{n-k})$.

L'endomorphisme T admet $n+1$ valeurs propres distincts donc il est diagonalisable .

EXERCICE 2

Questions de cours

1. (A) : $a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}$.

2. Soit t un réel de $]0,1[$. La fonction $x \mapsto t^x = e^{x\ln t}$ est décroissante. Si $x < y$ alors $t^y < t^x$.

3. $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

4. $\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t=1$. $\Gamma(n+1)=n!$

5. $F : x\mapsto \int_0^1 t^{t^x}dt$.

5.1. Soit $t\in]0,1]$ et $x\in\mathbb{R}$, la fonction $f_x : t\mapsto t^{t^x}=e^{t^x\ln t}$ est définie et continue sur $]0,1]$.
On a $\lim_{t\to 0^+} t^x\ln t=\begin{cases} 0 \text{ si } x>0 \\ -\infty \text{ si } x\leq 0\end{cases}$ ce qui donne $\lim_{t\to 0^+} f_x(t)=\begin{cases} 1 \text{ si } x>0 \\ 0 \text{ si } x\leq 0\end{cases}$, f_x est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0,1]$. Ainsi F est définie sur $\mathbb{R}$.

5.2. Soient $t\in]0,1[$ et x, y deux réels tels que $x<y$ alors $t^y<t^x$ et $t^x\ln t<t^y\ln t$ ce qui donne $t^{t^x}<t^{t^y}$ et $F(x)<F(y)$. Ainsi F est croissante .

5.3. Si $x\geq 0$ alors $F(x)\geqslant F(0)$ et $F(0)=\int_0^1 t\,dt=\frac{1}{2}$.

5.4. La fonction $f : (x,t)\mapsto t^{t^x}=e^{t^x\ln t}$ est continue sur $\mathbb{R}\times\ ]0,1[$. Pour avoir une relation de domination remarquons que : pour tout $t\in]0,1[$ la fonction $x\mapsto t^{t^x}=e^{t^x\ln t}$ est croissante de limite 1 en $+\infty$ donc elle est dominée par la fonction constante $\varphi : t\mapsto 1$ qui est intégrable sur $]0,1[$, d'où la continuité de F sur $\mathbb{R}$.

5.5. On va utiliser le *théorème de la convergence dominée ,* d'après la question précédente on a :
pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}\times\ ]0,1[\quad |f(x,t)|\leq 1$ et $t\mapsto 1$ qui est intégrable sur $]0,1[$.

$\rhd$ $\lim_{x\to+\infty} F(x)$:
Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $+\infty$. On a $F(u_n)=\int_0^1 g_n(t)\,dt$ avec $g_n(t)=e^{t^{u_n}\ln t}\,dt$.
Pour tout $t\in]0,1[$ on a $\lim_{n\to+\infty} g_n(t)=1$ donc $g_n \overset{CVS}{\to} 1$ sur $]0,1[$, le théorème de la convergence dominée donne $\lim_{n\to\infty} F(u_n)=1$.
La caractérisation séquentielle de la limite donne $\lim_{x\to+\infty} F(x)=1$.

$\rhd$ $\lim_{x\to-\infty} F(x)$:
Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $+\infty$. On a $F(-u_n)=\int_0^1 h_n(t)\,dt$ avec $h_n(t)=e^{t^{-u_n}\ln t}\,dt$.
Pour tout $t\in]0,1[$ on a $\lim_{n\to+\infty} h_n(t)=0$ donc $g_n \overset{CVS}{\to} 0$ sur $]0,1[$, le théorème de la convergence dominée donne $\lim_{n\to\infty} F(-u_n)=0$.
La caractérisation séquentielle de la limite donne $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$.

6. Soit $x>0$.

6.1. Soit t dans $]0,1]$, $g_n(t)=\frac{(t^x\ln(t))^n}{n!}$ donc la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n(t)$ converge de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)=e^{t^x\ln(t)})=t^{t^x}$ par suite la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge simplement sur $]0,1]$ vers $f : t\mapsto t^{t^x}$.

6.2. Soit n un entier naturel , on fait un changement de variable $t=e^{-u}$: ($t=0\Leftrightarrow u=+\infty$,$t=1\Leftrightarrow u=0$, $dt=-e^{-u}$ du)

$$\begin{aligned}\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{n!}\int_0^1 t^{nx}\,|\ln(t)|^n\,\mathrm{d}t\\ &\overset{t=e^{-u}}{=} \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} e^{-(nx+1)u}u^n\mathrm{d}u\\ &\overset{v=(nx+1)u}{=} \frac{1}{n!(nx+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty} e^{-v}v^n\mathrm{d}v\\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{n!(nx+1)^{n+1}}\end{aligned}$$

6.3. On applique le théorème d'intégration des séries de fonctions sur un intervalle quelconque :
On a :
$\rhd$ $\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge simplement sur $]0,1]$ vers $f : t\mapsto t^{t^x}$.

$\triangleright \displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(n+1)}{n!(nx+1)^{n+1}} = \frac{1}{(nx+1)^{n+1}}$.

$x > 0$ et $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = o(\frac{1}{n^2})$ donc la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge .

Le théorème mentionné au début donne :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 t^{t^x}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 g_n(t)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(1+nx)^{n+1}} \end{aligned}$$

Remarques : Pour $x > 0$ la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{(1+nx)^{n+1}}$ est alternée et vérifie le CSSA , le reste majoré par :

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(1+kx)^{k+1}}\right| \leq \frac{1}{(1+nx)^{n+1}}$$

donc $F(x) = 1 - \frac{1}{(1+x)^2} + O(\frac{1}{(1+2x)^3})$ et $1 - F(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

EXERCICE 3

1. f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $F'(x) = f(x)$.

2. Soit x dans $\mathbb{R}_+^*$, le changement de variable $u = xt$ donne :

$$\Psi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(u)\,du = \frac{1}{x}F(x)$$

3. $\triangleright$ f est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction $(t,x)\mapsto f(tx)$ est continue sur $[0,1]\times\mathbb{R}_+^*$. f est bornée sur $[0,1]$ donc la fonction $(t,x)\mapsto f(tx)$ est dominée par une fonction constante , qui est intégrable sur $[0,1]$. Donc $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\Psi(f)\in E$.

$\triangleright$ $\Psi(f)(0) = f(0)$.

4. Ψ est linéaire , d'après la linéarité de l'intégrale, et $\forall f\in E$ on a $\Psi(f)\in E$ donc $\Psi(f)$ est un endomorphisme de E.

5. Surjectivité de Ψ

Soit $h : x\in\mathbb{R}_+ \mapsto h(x) = \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{pour } x>0 \\ 0 & \text{pour } x=0 \end{cases}$

5.1. h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par les théorèmes généraux et $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0 = h(0)$, donc h est continue en 0 et elle est continue sur $\mathbb{R}_+$.

5.2. On a $\dfrac{h(x)-h(0)}{x} = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ qui n'admet pas de limite en 0 , h n'est pas dérivable en 0 , donc elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

5.3. Soit $g\in \mathrm{Im}(\Psi)$, il existe $f\in E$ telle que $\Psi(f) = g$, donc $g(x) = \frac{1}{x}F(x)$ si $x>0$ et $g(0) = f(0)$.
Ainsi $xg(x) = F(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, donc la fonction $x\mapsto xg(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

5.4. h n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ donc $h\notin \mathrm{Im}(\Psi)$.

5.5. $\mathrm{Im}(\Psi) \neq E$ donc Ψ n'est pas surjective .

6. Soit $f \in \ker \Psi$, on a pour x dans $\mathbb{R}_+^*$, $\Psi(f)(x) = \frac{1}{x}F(x)$ donc

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

par dérivation on a $f(x) = 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$, la continuité de f donne $f(0) = 0$ puis f est nulle sur $\mathbb{R}_+$.
Donc $\ker \Psi = \{0\}$ et Ψ est injective.

7. Recherche des éléments propres de Ψ

7.1. $\ker \Psi = \{0\}$ donc 0 n'est pas valeur propre de Ψ.

7.2. Soit $\mu \in \mathbb{R}$.Les solutions de (L) : $y' + \dfrac{\mu}{x}y = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ sont :

$$y = A\exp(-\int \frac{\mu}{x}dx) = Ax^{-\mu} \text{ , } A \in \mathbb{R}$$

7.3. Les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$ sont :

$$y = Ax^{-\mu} \;\text{ si } \mu \leq 0 \;\text{ ou } y = 0 \;\text{ si } \mu > 0$$

7.4. Soit λ une valeur propres de Ψ, $\lambda \neq 0$ et il existe f non nule telle que $\Psi(f) = \lambda f$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\Psi(f)(x) = \frac{1}{x}F(x) = \lambda f(x)$$

donc F est solution de l'équation différentielle :

$$y' + \frac{1}{\lambda x}y = 0$$

et il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = Ax^{\frac{-1}{\lambda}}$.
F est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $\lambda < 0$, de plus F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ alors $\frac{-1}{\lambda} \geq 1$, soit $-1 \leq \lambda$.
Ainsi $Sp(\Psi) = [-1, 0[$ et pour $\lambda \in [-1, 0[$, $E_\lambda(\Psi) = \mathrm{vect}(x \mapsto x^{\frac{-1}{\lambda}-1})$

8. Soit $n > 1$.

8.1. $B = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ est une base de F_n :
Soient $(\alpha_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ et $\left(\beta_j\right)_{j \in [\![1,n]\!]}$ des scalaires tels que $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i f_i + \sum\limits_{j=1}^n \beta_j g_j = 0$. $(*)$

8.1.1. La relation $(*)$ est équivalente à :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(x) + \sum_{j=1}^n \beta_j g_j(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

qui s'écrit

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x^i + \sum_{j=1}^n \beta_j x^j \ln x = 0 \quad \forall x > 0$$

on divise par x

$$\alpha_1 + \beta_1 \ln x + \sum_{i=2}^n \alpha_i x^i + \sum_{j=2}^n \beta_j x^j \ln x = 0 \quad \forall x > 0$$

puisque $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\sum\limits_{i=2}^n \alpha_i x^i + \sum\limits_{j=2}^n \beta_j x^j \ln x \right) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\alpha_1 + \beta_1 \ln x\right) = 0$, forcement on a $\beta_1 = 0$ et $\alpha_1 = 0$.

8.1.2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.
La relation $(*)$ devient

$$\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i x^i + \sum_{j=p+1}^{n} \beta_j x^j \ln x = 0 \quad \forall x > 0$$

on divise par x^{p+1}

$$\alpha_{p+1} + \beta_{+1} \ln x + \sum_{i=p+2}^{n} \alpha_i x^{i-p-1} + \sum_{j=p+2}^{n} \beta_j x^{j-p-1} \ln x = 0 \quad \forall x > 0$$

le passage à la limite en 0 donne $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

8.1.3. Par récurrence on obtient que $\mathscr{B}$ est libre , donc c'est une base de F_n et $\dim F_n = 2n$.

8.2. **Ψ induit un endomorphisme sur F_n**

8.2.1. Soient $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. La fonction $t \mapsto t^p \ln(t)$ est prolongeable par continuité en 0 donc elle est intégrable sur $]0, x]$ ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p \ln(t) \mathrm{d}t$ est convergente .
Soit $\varepsilon > 0$ une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^x t^p \ln(t) \mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \ln(t)\right]_\varepsilon^x - \frac{1}{p+1} \int_\varepsilon^x t^p \,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^{p+1}}{p+1} \ln(t) - \frac{t^{p+1}}{(p+1)^2}\right]_\varepsilon^x \end{aligned}$$

en faisant tendre ε vers 0 on obtient

$$\int_0^x t^p \ln(t) \mathrm{d}t = \frac{x^{p+1}}{p+1} \ln(x) - \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}$$

8.2.2. Calculons les images des éléments de la base $\mathscr{B} = (f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$:
▷ On a : $\Psi(f_i)(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x t^i dt = \dfrac{x^i}{i+1}$, donc $\boxed{\Psi(f_i) = \dfrac{1}{i+1} f_i}$.
▷ On a : $\Psi(g_i)(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x t^i \ln(t) dt = \dfrac{x^i}{i+1} \ln(x) - \dfrac{x^i}{(i+1)^2}$, donc
$\boxed{\Psi(g_i) = \dfrac{-1}{(i+1)^2} f_i + \dfrac{1}{i+1} g_i}$.
Ce qui montre que $\Psi(\mathscr{B}) \subset F_n$ et $\Psi(F_n) \subset F_n$, donc Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

8.3. La matrice M , de l'application Ψ_n dans la base $\mathscr{B}$ est donnée par :

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \Psi_n(f_1) & \cdots & \Psi_n(f_n) & \Psi_n(g_1) & \cdots & \Psi_n(g_n) \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{2} & & 0 & \frac{-1}{4} & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{n+1} & 0 & & \frac{-1}{(n+1)^2} \\ \hline & & & \frac{1}{2} & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & \frac{1}{n+1} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow f_1 \\ \vdots \\ \leftarrow f_n \\ \leftarrow g_1 \\ \vdots \\ \leftarrow g_n \end{array}$$

8.4. La matrice M , de l'application Ψ_n est triangulaire donc $\det \Psi_n = \det M = \left(\frac{1}{(n+1)!}\right)^2$, donc M est inversible et Ψ_n est un automorphisme de F_n.

8.5. Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto z(x) = \begin{cases} \left(x+x^2\right)\ln(x) & \text{pour } x>0 \\ 0 & \text{pour } x=0 \end{cases}$.

▷ On a $z = g_1 + g_2$ donc $z \in F_n$.

▷ On a : $\Psi_n(f_i) = \dfrac{1}{i+1} f_i$ et $\Psi_n(g_i) = \dfrac{-1}{(i+1)^2} f_i + \dfrac{1}{i+1} g_i$ donc

$$g_i = (i+1)\Psi_n(g_i) + \Psi_n(f_i) = \Psi_n((i+1)g_i + f_i)$$

par suite $z = \Psi_n(2g_1+f_1) + \Psi_n(3g_2+f_2) = \Psi_n(2g_1+f_1+3g_2+f_2)$.

D'où $\boxed{\Psi_n^{-1}(z) = f_1 + 2g_1 + f_2 + 3g_2}$.

EXERCICE 4

Questions de cours

1. Soit p une projection vectorielle d'un espace vectoriel E de dimension n et $\mathrm{rg}\, p = r \in \mathbb{N}$.
On peut avoir $p = 0$ ou id_E .

1.1. On a $E = \ker p \oplus \mathrm{Im}\, p$, dim $(\mathrm{Im}\, p) = r$ et pour tout x dans $\mathrm{Im}\, p$ on a $p(x) = x$, dans une base adaptée à la somme directe la matrice W de p s'écrit :

$$W = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

avec I_r la matrice identité d'ordre r.

1.2. $Sp(W) \subset \{0,1\}$.

1.3. On a $\mathrm{tr}(W) = \mathrm{rg}(W)$.

1.4. $\det(W) = 1$ si $p = id_E$ et $\det(W) = 0$ sinon .

2. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on a $X_i \sim \mathscr{B}(p)$,donc $X_i(\Omega) = \{0,1\}$ et $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$.

2.1. Pour tout ω dans $\Omega, M(\omega)$ est semblable à $\Delta(\omega) = \mathrm{diag}(X_1(\omega),\ldots,X_n(\omega))$, donc $T(\omega) = \mathrm{tr}(\Delta(\omega)) = X_1(\omega)+\ldots+X_n(\omega)$, par suite $T(\Omega) = [\![0,n]\!]$.

2.2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Posons $\mathscr{P}_k$ l'ensemble de toutes les parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal k , on a $\mathrm{Card}\mathscr{P}_k = \dbinom{n}{k}$.

L'événement $[T=k]$ contient les $\omega \in \Omega$ pour lesquels il existe une partie $I \in \mathscr{P}_k$ telle que $X_i(\omega) = 1$ si $i \in I$ et $X_i(\omega) = 0$ sinon . On alors

$$[T=k] = \bigcup_{I\in\mathscr{P}_k} \left(\left(\bigcap_{i\in I}[X_i=1]\right) \cap \left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]\setminus I}[X_i=0]\right)\right)$$

Cette réunion est disjointe et les variables $X_1,\ldots,X_n$ sont indépendantes donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T=k) &= \sum_{I\in\mathscr{P}_k} \prod_{i\in I} \mathbb{P}(X_i=1) \prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus I} \mathbb{P}(X_i=0) \\
&= \sum_{I\in\mathscr{P}_k} p^k q^{n-k} \ \ (\ q = 1-p) \\
&= \mathrm{Card}\mathscr{P}_k \\
&= \binom{n}{k} p^k q^{n-k}
\end{aligned}$$

T suit la loi et l'espérance de la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$.

Par suite $\mathbb{E}(T) = np$.

3. On a pour tout ω dans $\Omega, M(\omega)$ est diagonalisable et semblable à $\Delta(\omega) = \text{diag}(X_1(\omega),\dots,X_n(\omega))$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ $X_i(\Omega) = \{0,1\}$, donc $M(\omega)$ est la matrice d'une projection $(M(\omega)^2 = M(\omega))$, par suite $\text{tr}(M(\omega)) = \text{rg}(M(\omega))$ et $R = T$. D'où $R \sim \mathscr{B}(n,p)$.

4. On note D la variable aléatoire $\det(M)$.

4.1. Pour tout ω dans Ω , $M(\omega)$ est la matrice d'une projection donc $\det(M(\omega)) = 1$ ou 0 et $D(\Omega) = \{0,1\}$.

4.2. L'événementde $[D = 1]$ contient les ω tels $M(\omega) = \Delta(\omega) = I_n$ donc

$$[D=1] = \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} [X_i = 1]$$

l'indépendance des X_i donne :

$$\mathbb{P}(D=1) = \prod_{i\in[\![1,n]\!]} \mathbb{P}(X_i = 1) = p^n$$

Par suite

$$\mathbb{P}(D=0) = 1 - \mathbb{P}(D=1) = 1 - p^n$$

D'où $D \sim \mathscr{B}(p^n)$ et $\mathbb{E}(D) = p^n$.

5. Soit Z l'évènement :

« les sous-espaces propres de la matrice M ont tous la même dimension »

Pour tout ω dans Ω , $M(\omega)$ est la matrice d'une projection , ses sous espaces propres possibles sont $E_0(M(\omega)) = \ker M(\omega)$ et $E_1(M(\omega)) = \text{Im}\, M(\omega)$.

5.1. L'évènement V : « M ne possède qu'une seule valeur propre » est équivalent à $M = 0$ ou I_n on écrit donc $V = [M=0] \cup [M = I_n]$, ces deux événements sont disjoints donc

$$\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(M=0) + \mathbb{P}(M = I_n)$$

Et on a

$$[M=0] = \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} [X_i = 0] \text{ et } [M = I_n] = \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} [X_i = 1]$$

l'indépendance des X_i donne :

$$\mathbb{P}(M=0) = \prod_{i\in[\![1,n]\!]} \mathbb{P}(X_i = 0) = q^n \text{ et } \mathbb{P}(M = I_n) = \prod_{i\in[\![1,n]\!]} \mathbb{P}(X_i = 1) = p^n$$

D'où $\boxed{\mathbb{P}(V) = p^n + q^n}$.

5.2. On suppose n impair .

Pour tout ω dans Ω , on a $\mathbb{R}^n = \ker M(\omega) \oplus \text{Im}\, M(\omega)$, si $\omega \in Z$ alors $\dim\ker M(\omega) = \dim \text{Im}\, M(\omega)$.

Forcement on a un seul sous espace propre , car sinon $n = \dim \mathbb{R}^n = 2 \dim \text{Im}\, M(\omega)$, contredit le fait que n est paire . Ainsi si n impair alors $Z = V$ et $\boxed{\mathbb{P}(Z) = p^n + q^n}$.

5.3. $n = 2r$. D'après la question 2. on a $\mathbb{P}(T = r) = \binom{2r}{r} p^r q^r$.

On a $\omega \in Z$ alors $\dim\ker M(\omega) = \dim \text{Im}\, M(\omega) = r$ donc $Z = [R = r] = [T = r]$.

Ainsi $\boxed{\mathbb{P}(Z) = \binom{2r}{r} p^r q^r}$.

6. .

6.1. Soit $\omega \in \Omega$,on a

$$A = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1(\omega) & \cdots & X_n(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1(\omega)^2 & X_1(\omega)X_2(\omega) & \cdots & X_1(\omega)X_n(\omega) \\ X_1(\omega)X_2(\omega) & X_2(\omega)^2 & \cdots & X_2(\omega)X_n(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1(\omega)X_n(\omega) & X_2(\omega)X_n(\omega) & \cdots & X_n(\omega)^2 \end{pmatrix}$$

pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ on a $\boxed{a_{i,j}(\omega) = X_i(\omega)X_j(\omega)}$.

6.2. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $X_i(\Omega) = X_j(\Omega) = \{0,1\}$ donc $a_{i,j}(\Omega) = \{0,1\}$.

On a :

$\triangleright$ $[a_{i,j} = 1] = [X_i = 1] \cap [X_j = 1]$, X_i et X_j sont indépendantes donc :

$$\mathbb{P}(a_{i,j} = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1) = p^2$$

$\triangleright$ $\mathbb{P}(a_{i,j} = 0) = 1 - \mathbb{P}(a_{i,j} = 1) = 1 - p^2$.

D'où $\boxed{a_{i,j} \sim \mathscr{B}(p^2)}$.

6.3. Soit $\omega \in \Omega$, on a $\operatorname{tr}(A(\omega)) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2(\omega)$, or les $X_i(\omega) \in \{0,1\}$ donc $X_i^2(\omega) = X_i(\omega)$, d'où $\operatorname{tr}(A(\omega)) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\omega)$ et $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

6.4. Soit $\omega \in \Omega$. Remarquons que les colonnes de $A(\omega)$ sont colinéaires à $\begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$, si ce vecteur est non nul alors $rgA(\omega) = 1$ sinon $rgA(\omega) = 0$. Donc la variable aléatoire $\operatorname{rg}(A)$ prend les valeurs 0 ou 1.

6.5. Soit ω dans Ω .

$\triangleright$ Si $A(\omega) = 0$ alors $Sp(A(\omega)) = \{0\}$.

$\triangleright$ Si $A(\omega) \neq 0$ alors $\operatorname{rg}(A(\omega)) = 1$ .Le noyau est de dimension $n-1$, on prend une base de $\ker A$ est on la complète par un vecteur en une base de $\mathbb{R}^n$, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est égale à $\operatorname{diag}(\lambda, 0, ..., 0)$, cette dernière matrice est semblable à $A(\omega)$, ce qui donne $\lambda = \operatorname{tr}A(\omega)$ et $Sp(A(\omega)) = \{0, \operatorname{tr}A(\omega)\}$.

6.6. La variable aléatoire $\operatorname{rg}(A)$ prend les valeurs 0 ou 1.

Soit ω dans Ω . $\operatorname{rg}(A(\omega)) = 0$ est équivalent à $A(\omega) = 0$ et à $X_1(\omega) = ... = X_n(\omega) = 0$, donc

$$[\operatorname{rg}(A) = 0] = \bigcap_{i \in [\![1,n]\!]} [X_i = 0]$$

l'indépendance des X_i donne

$$\mathbb{P}(\operatorname{rg}(A) = 0) = \prod_{i \in [\![1,n]\!]} \mathbb{P}[X_i = 0] = q^n$$

Donc $\mathbb{P}(\operatorname{rg}(A) = 1) = 1 - \mathbb{P}(\operatorname{rg}(A) = 0) = 1 - q^n$.

La variable aléatoire $\operatorname{rg}(A)$ suit la loi $\mathscr{B}(1 - q^n)$.

Fin.