Notion de rang en algèbre linéaire

Table des matières

$\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on identifiera les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ aux vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

I Rang d'une famille de vecteurs

Définition 1 (Rang d'une famille de vecteurs)
Etant donné une famille finie $(x_1, \cdots, x_p)$ de vecteurs de E, on appelle **rang de $(x_1, \cdots, x_p)$** *la dimension du sous-espace vectoriel $Vect(x_1, \cdots, x_p)$. C'est un entier compris entre 0 et p, on le notera $rg(x_1, \cdots, x_p)$.*

Remarque

- *$rg(x_1, \cdots, x_p) = p$ si et seulement si $(x_1, \cdots, x_p)$ est libre.*
  En effet, $Vect(x_1, \cdots, x_p)$ est de dimension p ssi $(x_1, \cdots, x_p)$ est une base de $Vect(x_1, \cdots, x_p)$.
- *Si E est de dimension finie, alors on a également $rg(x_1, \cdots, x_p) \leq \dim(E)$, puisque $Vect(x_1, \cdots, x_p)$ est un SEV de E. On a donc $rg(x_1, \cdots, x_p) \leq \min(p, \dim(E))$.*

Propriété 2 (Rang et coordonnées)
Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.
La famille $(x_1, \cdots, x_p)$ de vecteurs de E est de même rang que la famille de vecteurs colonnes $([x_1]_{\mathcal{B}_E}, \cdots, [x_p]_{\mathcal{B}_E})$ de $\mathbb{K}^n$.

Preuve
Puisque l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & [x]_{\mathcal{B}_E} \end{array} \right.$ est un isomorphisme, elle conserve les dimensions des sous-espaces vectoriels, donc en particulier le rang des familles.

II Rang d'une application linéaire

Définition 3 (Rang d'une application linéaire)
Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on dit que u est **de rang fini** *lorsque $Im(u)$ est de dimension finie.*
Dans ce cas, on appelle **rang de u** *la dimension de $Im(u)$.*

Propriété 4
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E.
Alors $Im(u) = Vect(u(e_1), \cdots, u(e_p))$, donc en particulier $rg(u) = rg(u(e_1), \cdots, u(e_p))$.

Preuve
Les vecteurs $x \in E$ sont exactement les CL de la famille $(e_1, \cdots, e_p)$, donc par linéarité de u, les vecteurs de $Im(u)$ sont les CL de la famille $(u(e_1), \cdots, u(e_p))$ (puisque ce sont les $u(x)$ avec $x \in E$).

Remarque
Cela fonctionne aussi si $(e_1, \cdots, e_p)$ est seulement une famille génératrice de E, mais on utilisera des bases en pratique.

Théorème 5 (Théorème d'isomorphisme)
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit G un supplémentaire de $Ker(u)$ dans E (i.e. $E = Ker(u) \oplus G$).
Alors, la restriction $u_G : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Im(u) \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$ est un isomorphisme.

Preuve
Tout d'abord, l'application u_G est bien définie et linéaire, car G est un sous-espace vectoriel de E, et $u_G(G) = u(G) \subset Im(u)$.
Ensuite, u_G est surjective car $u(Ker(u)) = \{0_F\}$, donc $u_G(G) = u(G) = u(G + Ker(u)) = u(E) = Im(u)$. Enfin, u_G est injective car $Ker(u_G) = \{x \in G,\ u(x) = 0_F\} = G \cap Ker(u) = \{0_E\}$.

Théorème 6 (Théorème du rang)
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et on a

$$\dim(E) = \dim(Ker(u)) + \dim(Im(u)) = \dim(Ker(u)) + rg(u).$$

Preuve
Puisque E est de dimension finie, le sous-espace vectoriel $Ker(u)$ possède un supplémentaire G dans E (c'est immédiat d'après le théorème de la base incomplète). On peut donc appliquer le théorème précédent : étant isomorphe à G (qui est de dimension finie en tant que SEV de E), l'espace vectoriel $Im(u)$ est de dimension finie, et

$$\dim(Im(u)) = \dim(G) = \dim(E) - \dim(Ker(u)).$$

ATTENTION !
Ce théorème **ne dit pas** que $Im(u)$ et $Ker(u)$ sont supplémentaires ! Cela n'aurait *a priori* aucun sens puisque $Ker(u)$ est un SEV de E alors que $Im(u)$ est un SEV de F.

Corollaire 7 (Inégalité sur le rang)
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension $p \geq 1$ et F de dimension $n \geq 1$. Alors $rg(u) \in [\![0, \min(n,p)]\!]$.

Preuve
D'après le théorème du rang, $0 \leq rg(u) \leq \dim(E) = p$.
En outre, $Im(u)$ est un SEV de F donc $rg(u) \leq \dim(F) = n$.

Corollaire 8 (Cas particuliers)
Pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E et F de dimension finie, on a

- (i) *u est injective $\iff$ $rg(u) = \dim(E)$;*
- (ii) *u est surjective $\iff$ $rg(u) = \dim(F)$;*
- (iii) *u est un isomorphisme $\iff$ $rg(u) = \dim(E) = \dim(F)$.*

Preuve

- (i) Résulte du théorème du rang :
$$u \text{ injective } \iff Ker(u) = \{0_E\} \iff \dim(Ker(u)) = 0 \iff \dim(E) - rg(u) = 0.$$
- (ii) Puisque $Im(u)$ est un SEV de F, on a $Im(u) = F \iff \dim(Im(u)) = \dim(F)$, donc
$$u \text{ surjective } \iff Im(u) = F \iff rg(u) = \dim(F).$$
- (iii) Compilation des deux points précédents.

Théorème 9 (Représentation matricielle $J_{n,p,r}$)
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ avec E de dimension $p \geq 1$ et F de dimension $n \geq 1$.
Alors, il existe une base $\mathcal{B}_E$ de E et une base $\mathcal{B}_F$ de F telles que

$$Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),$$

où I_r est la matrice identité de taille $r = rg(u)$.

Preuve
Notons $r = rg(u)$. Notons G un supplémentaire de $Ker(u)$ dans E. D'après ce qui précède, G est isomorphe à $Im(u)$, donc $\dim(G) = r$. En notant $(e_1, \cdots, e_r)$ une base de G et $(e_{r+1}, \cdots, e_p)$ une base de $Ker(u)$, on obtient par concaténation une base $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ de E.
La famille image $(u(e_j))_{1 \leq j \leq p}$ vérifie $u(e_{r+1}) = \cdots = u(e_p) = 0_F$, et la sous-famille $(u(e_1), \cdots, u(e_r))$

est libre dans F (car c'est l'image de la base $(e_1, \cdots, e_r)$ de G par l'isomorphisme $u_G : G \to Im(u)$). Par le théorème de la base incomplète, on peut donc compléter $(u(e_1), \cdots, u(e_r))$ en une base $\mathcal{B}_F = (u(e_1), \cdots, u(e_r), \varepsilon_{r+1}, \cdots, \varepsilon_n)$ de F.
Si on représente alors u dans les bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$, on obtient la matrice $J_{n,p,r}$ voulue.

III Rang d'une matrice

Dans cette section, E et F sont de dimension finie. On note $p = \dim(E) \geq 1$ et $n = \dim(F) \geq 1$.

Définition 10 (Image d'une matrice)
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **image de** *A l'ensemble*

$$Im(A) = \{AX,\ X \in \mathbb{K}^p\} = \{Y \in \mathbb{K}^n,\ \exists X \in \mathbb{K}^p,\ Y = AX\}.$$

C'est aussi l'image de l'application linéaire canoniquement associée à A, c'est-à-dire l'application linéaire $u_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$: on a $Im(A) = Im(u_A)$.

Théorème 11 (L'image est engendrée par les colonnes)
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$Im(A) = Vect(C_1, \cdots, C_p),$$

où $(C_1, \cdots, C_p)$ sont les p vecteurs colonnes de A.

Preuve
Notons $(E_1, \cdots, E_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $u_A : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ l'application linéaire canoniquement associée à A. Par linéarité de u_A :

$$Im(u_A) = \{u_A(X),\ X \in \mathbb{K}^p\} = \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_i u_A(E_i),\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p \right\} = Vect(u_A(E_1), \cdots, u_A(E_p)),$$

c'est-à-dire $Im(A) = Vect(AE_1, \cdots, AE_p) = Vect(C_1, \cdots, C_p)$.

Remarque
Ainsi, les colonnes d'une matrice forment une famille génératrice de son image, mais elles ne sont pas toujours libres.

Définition 12 (Rang d'une matrice)
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **rang** *de A la dimension de $Im(A)$. On la note $rg(A) \in \mathbb{N}$.*

Théorème 13 (Interprétation du rang avec les colonnes)
Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $rg(A) \in [\![0, \min(n,p)]\!]$, et $rg(A)$ est le nombre maximal de colonnes libres de A.

Remarque
Le cas $rg(A) = 0$ correspond au cas où A est nulle (dans ce cas, toute sous-famille des colonnes de A ne contient que des vecteurs nuls, donc est liée).

Preuve
$Im(A)$ est un SEV de $\mathbb{K}^n$ (en tant qu'image d'une application linéaire $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$), donc $rg(A) = \dim(Im(A)) \in [\![0, n]\!]$.
D'après ce qui précède, la famille $(C_1, \cdots, C_p)$ est une famille génératrice de $Im(A)$, de laquelle on peut extraire une base de $Im(A)$, qui sera de cardinal $r \in [\![0, p]\!]$, et par définition de la dimension d'un espace vectoriel, $r = \dim(Im(A)) = rg(A)$. On a donc bien $r \leq n$ et $r \leq p$, c'est-à-dire $r \leq \min(n,p)$.
Enfin, les bases de $Im(A)$ sont les familles libres maximales de $Im(A)$, donc l'entier r est bien le nombre maximal de colonnes libres de A.

Théorème 14 (Lien avec le rang d'une application linéaire)
Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour toute base $\mathcal{B}_E$ de E et pour toute base $\mathcal{B}_F$ de F, on a

$$rg(Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)) = rg(u).$$

Preuve
Fixons $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}_F$ et notons $A = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$. Par définition :

$$rg(A) = rg(C_1, \cdots, C_p) = \dim\left(Vect([u(e_1)]_{\mathcal{B}_F}, \cdots, [u(e_p)]_{\mathcal{B}_F})\right).$$

Puisque l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & [x]_{\mathcal{B}_F} \end{array} \right.$ est un isomorphisme, elle conserve les dimensions des sous-espaces vectoriels, donc en particulier le rang, d'où :

$$rg(A) = \dim\left(Vect(u(e_1), \cdots, u(e_p))\right) = \dim(Im(u)) = rg(u).$$

Théorème 15 (Rang et matrices équivalentes)
Deux matrices A, B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si $rg(A) = rg(B)$.

Remarque
En particulier, si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$, alors :

$$A \sim J_{n,p,r} \iff rg(A) = r.$$

Preuve
Si $A \sim B$, alors A et B représentent une même application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ dans deux couples de bases, donc A et B sont de même rang (celui de u) d'après le théorème précédent.
Réciproquement, si A et B sont de rang r, alors en introduisant une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ représentée par A dans un couple de bases (ce qui est toujours possible), on a $rg(u) = rg(A) = r$, donc il existe un autre couple de bases dans lequel u se représente par la matrice $J_{n,p,r}$. On a donc montré que $A \sim J_{n,p,r}$. De même, $B \sim J_{n,p,r}$ et on conclut par transitivité que $A \sim B$.

Remarque
En particulier, deux matrices semblables ont même rang (puisqu'elles sont équivalentes), mais la réciproque est fausse !

Théorème 16 (Invariance du rang par transposition)
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $rg(A^T) = rg(A)$.

ATTENTION !
En général, A et A^T ne sont pas équivalentes ! (puisqu'elles ne sont pas de même format).

Preuve
Notons $r = rg(A) \in [\![0, \min(n,p)]\!]$. Par ce qui précède, on a $A \sim J_{n,p,r}$, donc il existe $(P,Q) \in GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$ telles que $Q^{-1}AP = J_{n,p,r}$. En transposant, on obtient

$$P^T A^T (Q^{-1})^T = J_{n,p,r}^T,$$

c'est-à-dire

$$\left((P^T)^{-1}\right)^{-1} A^T (Q^{-1})^T = J_{p,n,r}.$$

Ainsi, on a $A^T \sim J_{p,n,r}$, donc $rg(A^T) = r = rg(A)$.

Corollaire 17 (Interprétation du rang avec les lignes)
Le rang d'une matrice A est également le nombre maximal de lignes libres de A (si on considère les lignes comme des vecteurs de $\mathbb{K}^n$).

Preuve
Les colonnes de A^T sont les lignes de A, et $rg(A) = rg(A^T)$.

Notation
Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[1,n]\times[1,p]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et pour toutes parties non vides $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$, on notera $A_{I,J}$ la matrice extraite de A suivante : $A_{I,J} = (a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$.
Elle est obtenue en supprimant les lignes de A d'indice $i \notin I$ et les colonnes d'indice $j \notin J$.

Propriété 18 (Rang d'une matrice extraite)
Avec les notations précédentes, on a $rg(A_{I,J}) \leq rg(A)$.

Preuve
Puisque $rg(A)$ est le nombre maximal de colonnes libres de A, on obtient en supprimant les colonnes de A d'indice $j \notin J$ que $rg(A_{[1,n],J}) \leq rg(A)$.
Mais le rang d'une matrice est aussi le nombre maximal de lignes libres, donc en supprimant les lignes de $A_{[1,n],J}$ d'indice $i \notin I$, on obtient finalement $rg(A_{I,J}) \leq rg(A_{[1,n],J}) \leq rg(A)$.

Théorème 19 (Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites)
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$. *On a :*

$$rg(A) \geq r \iff \text{il existe une matrice extraite de } A \text{ de taille } r\times r \text{ inversible.}$$

En conséquence, $rg(A)$ *est la taille maximale des matrices extraites de* A *carrées et inversibles.*

Preuve
S'il existe une matrice $A_{I,J}$ de taille $r \times r$ inversible, alors $rg(A_{I,J}) = r$ (puisque $A_{I,J}$ représente notamment un isomorphisme $\mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r$) donc par ce qui précède, $rg(A) \geq rg(A_{I,J}) = r$.
Réciproquement, si $rg(A) \geq r$, alors il existe au moins r colonnes libres de A, notons-les $C_{j_1}, \cdots, C_{j_r}$ avec $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq p$. La famille $(C_{j_1}, \cdots, C_{j_r})$ est libre dans $\mathbb{K}^n$, donc la matrice extraite $A_{[1,n]\times\{j_1,\cdots,j_r\}}$ est de rang r.
Vu que r est aussi le nombre maximal de lignes libres de $A_{[1,n]\times\{j_1,\cdots,j_r\}}$, on peut donc extraire r lignes libres $L_{i_1}, \cdots, L_{i_r}$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$, et ainsi, la matrice extraite $A_{\{i_1,\cdots,i_r\},\{j_1,\cdots,j_r\}}$ est carrée et inversible.