Représentations matricielles

Table des matières

$\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on identifiera les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ aux vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

I Représentations d'un vecteur, d'une application linéaire

Notation (Vecteur colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base)
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et soit $x \in E$, ayant pour coordonnées $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ dans la base $\mathcal{B}$ (c'est-à-dire que $(x_1, \cdots, x_n)$ est l'unique n-uplet tel que $x = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i e_i$). On notera alors :

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

(qu'on identifiera comme d'habitude à un élément de $\mathbb{K}^n$).

Théorème 1 (Isomorphisme associé à une base)
Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors l'application

$$\varphi_{\mathcal{B}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ (x_1, \cdots, x_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n x_i e_i \end{array} \right.$$

est un isomorphisme (application linéaire bijective), dont l'application réciproque est :

$$\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ x & \longmapsto & [x]_{\mathcal{B}} \end{array} \right. .$$

Remarque
Ainsi, tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$, via le choix d'une base.

Preuve
La linéarité de $\varphi_{\mathcal{B}}$ se vérifie aisément.
Injectivité : par liberté de la famille $(e_1, \cdots, e_n)$.

$$x \in Ker(\varphi_{\mathcal{B}}) \iff \sum_{i=1}^n x_i e_i = 0 \iff x_1 = \cdots = x_n = 0 \iff x = 0_E.$$

Surjectivité : vu que $(e_1, \cdots, e_n)$ est génératrice de E, tout vecteur $x \in E$ s'écrit sous la forme $\varphi_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_n)$, avec $x_1, \cdots, x_n$ dans $\mathbb{K}$.
Ainsi, $\varphi_{\mathcal{B}}$ est bien un isomorphisme.
L'expression de $\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$ vient directement de la définition des coordonnées d'un vecteur dans une base.

Définition 2 (Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases)
Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, soit $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base de F (un deuxième $\mathbb{K}$-ev de dimension finie), et soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **matrice de u dans les bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$** *la matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (à n lignes et p colonnes) ayant pour colonnes les $[u(e_j)]_{\mathcal{B}_F}$ pour $1 \leq j \leq p$. On notera $A = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ cette matrice, ou encore $Mat_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), \cdots, u(e_n))$.*

Remarque
Ainsi, la matrice d'une application linéaire se construit **par colonnes***, en décomposant les images des vecteurs de la base de départ $\mathcal{B}_E$ dans la base d'arrivée $\mathcal{B}_F$:*

$$A = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = \begin{pmatrix} | & \vdots & | \\ [u(e_1)]_{\mathcal{B}_F} & \vdots & [u(e_p)]_{\mathcal{B}_F} \\ | & \vdots & | \end{pmatrix}$$

(bien noter que le nombre de colonnes est la dimension de l'espace de départ E, et le nombre de lignes la dimension de l'espace d'arrivée F).
En notant $a_{i,j}$ le coefficient positionné en i^e ligne et j^e colonne de A, on a donc

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \qquad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_i.$$

Notation
Dans le cas particulier où $u : E \to E$ est un endomorphisme et qu'on choisit **la même base** de représentation sur l'espace de départ et d'arrivée (ce qui n'est pas obligatoire !), on pourra utiliser la notation abrégée :

$$Mat_{\mathcal{B}_E}(u) = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(u) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),$$

où $n = \dim(E)$.

Théorème 3 (Isomorphisme entre applications linéaires et matrices)
Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, soit $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base de F. Alors, l'application

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme.

Preuve
Là encore, on vérifie facilement la linéarité de ψ : soit $(u, v, \lambda) \in \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(E,F) \times \mathbb{K}$.
En notant $A = (a_{i,j})_{i,j} = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$, $B = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(v)$ et $C = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(\lambda u + v)$, on a pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:

$$(\lambda u + v)(e_j) = \lambda u(e_j) + v(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_i + \sum_{i=1}^{n} b_{i,j}\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,j} + b_{i,j})\varepsilon_i.$$

Ainsi, on peut identifier les coefficients de C :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], \qquad c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + b_{i,j}$$

(puisque $c_{i,j}$ est la coordonnée de $(\lambda u + v)(e_j)$ suivant ε_i), ce qui montre que $C = \lambda A + B$, et donc la linéarité de ψ.
Enfin, ψ est bijective car pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une seule application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ représentée par A dans les bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$: c'est l'unique application linéaire u telle que

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \qquad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\varepsilon_i$$

(rappelons qu'une application linéaire est entière est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de l'espace de départ).

Remarque
Ainsi, **si on impose** *deux espaces vectoriels E (de dimension p) et F (de dimension n), et deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ respectives de ceux-ci, alors $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ représente* **une seule application linéaire de E dans F.**
Mais bien sûr, cette matrice peut représenter d'autres applications linéaires si on change les espaces E et F et les bases de représentation.

Définition 4 (Application linéaire canoniquement associée à une matrice)
Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **application linéaire canoniquement associée à A** *l'application*

$$u_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

(là encore on identifie les éléments de $\mathbb{K}^p$ à des vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, pour que le produit AX ait un sens).
L'application u_A est linéaire, et A est la matrice de u_A dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

Remarque
Ainsi, une matrice à n lignes et p colonnes peut toujours représenter (dans les bases canoniques) une unique application linéaire $\mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$.

Théorème 5 (Coordonnées de l'image d'un vecteur)
Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, soit $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$\forall x \in E, \qquad [u(x)]_{\mathcal{B}_F} = Mat_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u) \times [x]_{\mathcal{B}_E}.$$

Preuve
Notons $A = (a_{i,j}) = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$. Soit $x = \sum_{j=1}^p x_j e_j$ un vecteur de E. Par linéarité de u et définition de A, on a

$$u(x) = \sum_{j=1}^p x_j u(e_j) = \sum_{j=1}^p x_j \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \varepsilon_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j \right) \varepsilon_i.$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la coordonnée de $u(x)$ suivant ε_i est le coefficient

$$y_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j} x_j,$$

et on reconnaît le coefficient $(i, 1)$ de la matrice colonne $A \times [x]_{\mathcal{B}_E}$ (par produit de la i^e ligne de A et de la matrice colonne $[x]_{\mathcal{B}_E}$). Donc finalement :

$$[u(x)]_{\mathcal{B}_F} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \times [x]_{\mathcal{B}_E}.$$

Théorème 6 (Matrice d'une composée)
Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, soit $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base de F, soit $\mathcal{B}_G = (\xi_1, \cdots, \xi_m)$ une base de G. Etant données $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, on a $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$ et

$$Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_G}(v \circ u) = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_G}(v) \times Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u).$$

Preuve
Notons $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ les matrices représentatives respectives de u et v dans les bases annoncées et montrons que BA est la matrice représentative de $v \circ u$ (attention à l'ordre dans le produit !), en calculant les images des vecteurs de la base de départ.
Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ on a par construction des matrices A et B :

$$(v \circ u)(e_j) = v(u(e_j)) = v \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} \varepsilon_i \right) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} v(\varepsilon_i),$$

et donc

$$(v \circ u)(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \left(\sum_{k=1}^m b_{k,i} \xi_k \right) = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,j} \right) \xi_k,$$

et on a bien $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,j} = c_{k,j}$ avec $C = BA$, ce qui montre le résultat.

Corollaire 7 (Correspondance entre isomorphismes et matrices inversibles)
On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$*, et on fixe* $\mathcal{B}_E$ *une base de* E *et* $\mathcal{B}_F$ *une base de* F*.*
Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ *est bijective si et seulement si* $Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ *est inversible.*
Dans ce cas, $Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)^{-1} = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u^{-1})$*.*

Preuve
Notons $n = \dim(E) = \dim(F)$.
Pour $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, E)$, on a, en utilisant les résultats précédents :

$$v \circ u = Id_E \iff Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(v \circ u) = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(Id_E) \iff Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(v) \times Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) = I_n,$$

et de même :

$$u \circ v = Id_F \iff Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \times Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(v) = I_n.$$

Le résultat s'en déduit par définition de l'inversibilité d'une matrice.

II Changements de bases

Définition 8 (Matrice de passage d'une base à une autre)
Etant données deux bases $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ *et* $\mathcal{B}'_E = (e'_1, \cdots, e'_n)$ *d'un même* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E*, on appelle* **matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$** *la matrice*

$$P = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(Id_E) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Par définition, les colonnes de P *sont donc les coordonnées des* $Id_E(e'_j) = e'_j$ *dans la base* $(e_1, \cdots, e_n)$ *:*

$$P = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(Id_E) = \begin{pmatrix} | & \vdots & | \\ [e'_1]_{\mathcal{B}_E} & \vdots & [e'_n]_{\mathcal{B}_E} \\ | & \vdots & | \end{pmatrix}.$$

On emploiera la notation suivante, pratique :

$$P = Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E),$$

qui traduit bien le fait qu'on exprime (en colonne), les vecteurs de $\mathcal{B}'_E$ *en fonction de ceux de* $\mathcal{B}_E$*.*

Remarque

- *Notons* $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice identité de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*. On a*
$$Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E) = I_n \iff \mathcal{B}'_E = \mathcal{B}_E.$$
- *Si* $\mathcal{B}_E$*,* $\mathcal{B}'_E$ *et* $\mathcal{B}''_E$ *sont trois bases de* E*, alors*
$$Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E) = Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}''_E) = \iff \mathcal{B}'_E = \mathcal{B}''_E.$$

Propriété 9

(i) *Avec les notations précédentes,* P *est inversible et* $P^{-1} = Mat_{\mathcal{B}'_E}(\mathcal{B}_E)$*.*

(ii) *Toute matrice inversible* $P \in GL_n(\mathbb{K})$ *est la matrice de passage entre la base canonique de* $\mathbb{K}^n$ *et une autre base de* $\mathbb{K}^n$*.*
Plus généralement, si on fixe un $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension* $n \geq 1$ *et une base* $\mathcal{B}_E$ *de* E*, alors pour toute matrice* $P \in GL_n(\mathbb{K})$*, il existe une unique base* $\mathcal{B}'_E$ *de* E *telle que* $P = Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E)$*.*

Preuve

(*i*) D'après les formules de composition :

$$Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E) \times Mat_{\mathcal{B}'_E}(\mathcal{B}_E) = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(Id_E) \times Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}(Id_E) = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(Id_E \circ Id_E) = I_n,$$

et pareil dans l'autre sens :

$$Mat_{\mathcal{B}'_E}(\mathcal{B}_E) \times Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E) = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}(Id_E) \times Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(Id_E) = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_E}(Id_E \circ Id_E) = I_n,$$

d'où le résultat.

(*ii*) Etant donnée $A \in GL_n(\mathbb{K})$, il suffit de considérer $u_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ (l'endomorphisme canoniquement associé à A), Puisque A est inversible, u_A est bijective. En notant $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, la famille image $\mathcal{B}' = (u_A(e_1), \cdots, u_A(e_n))$ est une base de $\mathbb{K}^n$ (puisque u_A est un isomorphisme), et la matrice de passage qui relie ces deux bases n'est autre que A :

$$A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u_A) = Mat_{\mathcal{B}}(u_A(e_1), \cdots, u_A(e_n)) = Mat_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}').$$

Le même raisonnement fonctionne avec n'importe quel espace E de dimension n et n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E, et l'unicité de $\mathcal{B}'$ vient du second point de la remarque précédente.

ATTENTION !

L'identité $Id_E : x \mapsto x$ ne se représente donc pas seulement par la matrice identité I_n.
C'est seulement le cas si on prend $\mathcal{B}'_E = \mathcal{B}_E$.
La propriété précédente dit que n'importe quelle matrice carrée inversible peut représenter l'identité de E (à condition de bien choisir les bases au départ et à l'arrivée !).

Théorème 10 (Formule de changement de base pour un vecteur)
Soit deux bases de E, notées $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathcal{B}'_E = (e'_1, \cdots, e'_n)$. Alors, pour tout $x \in E$:

$$[x]_{\mathcal{B}_E} = Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E) \times [x]_{\mathcal{B}'_E}.$$

Preuve

D'après la formule des coordonnées de l'image d'un vecteur :

$$[x]_{\mathcal{B}_E} = [Id_E(x)]_{\mathcal{B}_E} = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(Id_E) \times [x]_{\mathcal{B}'_E} = Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E) \times [x]_{\mathcal{B}'_E}.$$

Remarque

En notant $X = [x]_{\mathcal{B}_E} \in \mathbb{K}^n$, $X' = [x]_{\mathcal{B}'_E} \in \mathbb{K}^n$ (vecteurs colonnes), et $P = Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E) \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage, on a

$$X = PX'.$$

Théorème 11 (Formule de changement de bases pour une application linéaire)
Soit deux bases de E, notées $\mathcal{B}_E = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathcal{B}'_E = (e'_1, \cdots, e'_p)$.
Soit deux bases de F, notées $\mathcal{B}_F = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ et $\mathcal{B}'_F = (\varepsilon'_1, \cdots, \varepsilon'_n)$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

$$Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u) = Mat_{\mathcal{B}_F}(\mathcal{B}'_F)^{-1} \times Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u) \times Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E).$$

Preuve

D'après la formule de composition (utilisée deux fois), on a par associativité de la loi $\circ$:

$$Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u) = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(Id_F \circ u \circ Id_E) = Mat_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}(Id_F) \times Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \times Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(Id_E),$$

c'est-à-dire

$$Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u) = Mat_{\mathcal{B}'_F}(\mathcal{B}_F) \times Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u) \times Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E).$$

Remarque

En notant $A = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$, $A' = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u)$ (matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) et $P = Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E) \in GL_p(\mathbb{K})$, $Q = Mat_{\mathcal{B}_F}(\mathcal{B}'_F) \in GL_n(\mathbb{K})$ les matrices de passage, on a

$$A' = Q^{-1}AP.$$

III Matrices équivalentes, matrices semblables

Théorème 12 (Matrices équivalentes)
Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. La relation binaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$:

$$A \sim A' \iff \exists P \in GL_p(\mathbb{K}),\ \exists Q \in GL_n(\mathbb{K}),\ A' = Q^{-1}AP$$

est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Lorsque $A \sim A'$, on dit que A et A' sont **équivalentes***.*

Preuve
Vérifications simples.

Propriété 13 (Interprétation de l'équivalence de matrices)
Soit A, A' dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Les matrices A et A' sont équivalentes si et seulement s'il existe des bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ de E, des bases $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}'_F$ de F et une application linéaire $u : E \to F$ telles que $A = Mat_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ et $A' = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u)$.

Preuve
Le sens réciproque a été montré précédemment (formule de changement de bases pour les applications linéaires).
Sens direct : supposons $A' = Q^{-1}AP$ avec $(P,Q) \in GL_p(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$.
Fixons une base $\mathcal{B}_E$ de E et une base $\mathcal{B}_F$ de F.
Considérons l'application linéaire $u : E \to F$ représentée dans les bases $(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ par la matrice A (elle existe et est unique d'après ce qui précède).
En tant que matrice inversible, P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à une (unique) base $\mathcal{B}'_E$ de E.
Et de même pour Q. On a donc

$$P = Mat_{\mathcal{B}_E}(\mathcal{B}'_E), \qquad Q = Mat_{\mathcal{B}_F}(\mathcal{B}'_F),$$

et on conclut par la formule de changement de bases que $A' = Mat_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(u)$.

Théorème 14 (Matrices semblables)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La relation binaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A \underset{s}{\sim} A' \iff \exists P \in GL_n(\mathbb{K}),\ A' = P^{-1}AP$$

est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Lorsque $A \underset{s}{\sim} A'$, on dit que A et A' sont **semblables***.*

Preuve
Vérifications simples.

<u>ATTENTION !</u>
Cette notion n'a de sens que pour des matrices **carrées**.

Propriété 15 (Interprétation de la similitude de matrices)
Soit A, A' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Les matrices A et A' sont semblables si et seulement s'il existe des bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E$ de E et un endomorphisme $u : E \to E$ telles que $A = Mat_{\mathcal{B}_E}(u)$ et $A' = Mat_{\mathcal{B}'_E}(u)$.

Preuve
Immédiat d'après ce qui précède (c'est la formule du changement de bases dans le cas particulier où $E = F$ et $P = Q$).

Remarque

Deux matrices semblables sont a fortiori équivalentes, mais la réciproque est fausse !