

Dimension d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

Table des matières

I	Borne des familles libres en dimension finie	4
II	Bases en tant qu'éléments maximaux/minimaux	5
III	Construction de bases en dimension finie et notion de dimension	5
IV	SEV d'un espace vectoriel de dimension finie	6

$\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

I Borne des familles libres en dimension finie

Définition 1 (Espace vectoriel de dimension finie)

On dit que E est de dimension finie lorsque E possède une famille génératrice finie.

Théorème 2 (Lemme de Steinitz)

Si E possède une famille génératrice finie de cardinal $n \in \mathbb{N}$, alors toute famille de E de cardinal $n + 1$ est liée.

Preuve

Par récurrence sur n .

- Initialisation : si $n = 0$, alors $E = \{0_E\}$, donc toute famille de E de cardinal 1 est liée (c'est la famille (0_E)).
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété soit vraie pour tout espace vectoriel E' engendré par une famille de cardinal $n - 1$, et montrons la propriété pour un espace vectoriel E engendré par une famille de cardinal n , notée $(e_1, \dots, e_n) \in E^n$.
Considérons donc $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$, et montrons qu'elle est liée. Déjà, chaque x_j est CL de $(e_1, \dots, e_n)$, puisqu'on a supposé $E = Vect(e_1, \dots, e_n)$. On note :

$$\forall j \in [1, n+1], \quad x_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{i,j} e_i,$$

avec les $\alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$. L'idée va être "d'éliminer" le dernier vecteur e_n en combinant les x_i , grâce à la "méthode du pivot", et d'utiliser l'hypothèse de récurrence sur le SEV $E' = Vect(e_1, \dots, e_{n-1})$. Deux cas se présentent :

- Si $\forall j, \alpha_{n,j} = 0$, alors $x_j \in E' = Vect(e_1, \dots, e_{n-1})$ pour tout $1 \leq j \leq n+1$, donc $(x_1, \dots, x_n)$ est liée (par H.R.), et donc la sur-famille $(x_1, \dots, x_{n+1})$ aussi.
- S'il existe j_0 tel que $\alpha_{n,j_0} \neq 0$, alors on peut supposer (quitte à permuter les x_i) que $\alpha_{n,n+1} \neq 0$, ce qui permet d'exprimer e_n :

$$e_n = \frac{1}{\alpha_{n,n+1}} \left(x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i,n+1} e_i \right),$$

et donc d'éliminer e_n dans $x_1, \dots, x_n$:

$$\forall j \in [1, n], \quad x_j = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i,j} e_i + \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}} \left(x_{n+1} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i,n+1} e_i \right),$$

ce qui amène :

$$\forall j \in [1, n], \quad x_j - \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}} x_{n+1} \in E' = Vect(e_1, \dots, e_{n-1}).$$

Par H.R., la famille $(x_j - \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}} x_{n+1})_{1 \leq j \leq n}$ est donc liée, d'où l'existence de coefficients $(\beta_1, \dots, \beta_n) \neq (0, \dots, 0)$ tels que

$$\sum_{j=1}^n \beta_j \left(x_j - \frac{\alpha_{n,j}}{\alpha_{n,n+1}} x_{n+1} \right) = 0_E,$$

ce qui montre que $(x_1, \dots, x_{n+1})$ est liée.

Remarque

Dans ces conditions :

- toute famille de E de cardinal $\geq n + 1$ est liée (puisque toute sur-famille d'une famille liée est liée) ;
- toute famille infinie de E est liée ;
- toute famille libre de E est finie, de cardinal $\leq n$;
- les familles libres de E sont de cardinal inférieur ou égal aux familles génératrices.

Pour construire des bases de E (c'est-à-dire des familles libres et génératrices de E), il est donc logique de chercher les familles libres de plus grand cardinal (les "familles libres maximales"), ou les familles génératrices de plus petit cardinal (les "familles génératrices minimales"), ce que nous allons montrer dans la section suivante.

II Bases en tant qu'éléments maximaux/minimaux

Théorème 3 (Caractérisation des bases)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie) et $e = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E (où I est un ensemble quelconque, éventuellement infini). Alors, il y a équivalence entre :

- (i) e est une base de E ;
- (ii) e est une famille libre maximale de E (au sens où toute sur-famille stricte est liée) ;
- (iii) e est une famille génératrice minimale de E (au sens où toute sous-famille stricte n'est plus génératrice de E).

Preuve

$(i) \implies (ii)$ Si $e = (e_i)_{i \in I}$ est une base de E , alors elle est libre par définition. Rajoutons un vecteur $x \in E$ et montrons que la sur-famille (e, x) est liée. Puisque e est génératrice de E , le vecteur x est combinaison linéaire de e , et donc (e, x) est liée. Ceci montre que e est libre maximale.

$(ii) \implies (i)$ Si e est libre maximale, alors étant donné $x \in E$, la sur-famille (e, x) est liée, donc (puisque e est libre), $x \in \text{Vect}(e)$, ce qui montre que e est génératrice de E , c'est donc finalement une base de E .

$(i) \implies (iii)$ Si e est une base de E , alors elle est génératrice de E par définition. Si on retire un vecteur e_{i_0} (avec $i_0 \in I$), alors la sous-famille $e' = (e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ n'est plus génératrice de E , sinon e_{i_0} serait combinaison linéaire de $(e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$, contredisant ainsi le caractère libre de e .

$(iii) \implies (i)$ Si e est génératrice minimale de E , alors pour tout $i_0 \in I$, $(e_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ n'engendre pas $E = \text{Vect}((e_i)_{i \in I})$, donc e_{i_0} n'est pas CL des autres e_i , ce qui implique que e est libre (aucun vecteur n'est CL des autres), donc finalement c'est une base de E .

Remarque

Les familles envisagées ici peuvent être infinies (on rappelle qu'une famille infinie est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres). Cette caractérisation des bases est donc également vraie lorsque E n'est pas de dimension finie.

III Construction de bases en dimension finie et notion de dimension

Théorème 4 (Théorème de la "base extraite")

On suppose que E est de dimension finie, que $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de E (pas nécessairement finie) et que la sous-famille $(e_i)_{i \in J}$ (avec $J \subset I$) est libre.

Alors il existe une partie L telle que $J \subset L \subset I$ et $(e_i)_{i \in L}$ est une base de E .

En particulier : de toute famille génératrice de E , on peut extraire une base de E .

Preuve

Considérons l'ensemble (un peu abstrait !) :

$$\mathcal{X} = \{H \in \mathcal{P}(I), J \subset H \subset I, (e_i)_{i \in H} \text{ libre}\}$$

(on indexe ainsi toutes les sous-familles libres de la famille génératrice $(e_i)_{i \in I}$ qui contiennent $(e_i)_{i \in J}$). Cet ensemble $\mathcal{X}$ est non vide car $J \in \mathcal{X}$. Ensuite, puisque E est de dimension finie, il existe une famille finie de cardinal $n \in \mathbb{N}$ qui engendre E , donc tous les $H \in \mathcal{X}$ sont finis avec $\text{Card}(H) \leq n$ (d'après le lemme de Steinitz). La partie $\text{Card}(\mathcal{X})$ est non vide et majorée dans $\mathbb{N}$, donc elle possède un plus grand élément. Il existe donc $L \in \mathcal{X}$ de cardinal maximal. Montrons que cette partie L convient.

Déjà, $(e_i)_{i \in L}$ est libre par définition de $\mathcal{X}$, reste à montrer qu'elle engendre E .

Pour tout $j \in I \setminus L$, la sur-famille $((e_i)_{i \in L}, e_j)$ est liée (par maximalité de L), donc (puisque $(e_i)_{i \in L}$ est libre), on a $e_j \in \text{Vect}((e_i)_{i \in L})$. Cela permet de "réduire le Vect" :

$$E = \text{Vect}((e_i)_{i \in I}) = \text{Vect}((e_i)_{i \in L}),$$

donc $(e_i)_{i \in L}$ est finalement une base de E .

En partant d'une famille génératrice quelconque et en considérant la famille vide (qui est bien libre), on obtient ainsi en particulier la seconde assertion.

Théorème 5 (Théorème "de la dimension")

*Tout espace vectoriel E de dimension finie possède des bases (nécessairement finies car libres), et elles ont toutes même cardinal. On appelle alors **dimension de E** le cardinal commun des bases des E . C'est un entier naturel noté $\dim(E)$.*

Preuve

- **Existence de bases** : un tel espace E possède une famille génératrice finie, de laquelle on peut extraire une base d'après le th. précédent.
- **Cardinal des bases** : si e et e' sont deux bases de E , alors elles sont finies (car libres), et on a $\text{Card}(e) \leq \text{Card}(e')$ (puisque e est libre et e' génératrice). En inversant les rôles, on a aussi $\text{Card}(e') \leq \text{Card}(e)$, donc $\text{Card}(e) = \text{Card}(e')$.

Remarque

L'entier $\dim(E)$ est donc le cardinal maximal des familles libres de E , et le cardinal minimal des familles génératrices de E .

Théorème 6 (Théorème de la "base incomplète")

On suppose que E est de dimension finie.

- (i) **Version faible** : *Toute famille libre de E peut se compléter en une base de E .*
- (ii) **Version forte** : *Etant données une famille génératrice $g = (g_i)_{i \in I}$ de E et une famille libre $\ell = (\ell_i)_{i \in J}$ de E , on peut compléter ℓ en une base de E , en utilisant exclusivement des éléments de g .*

Preuve

- (i) Découle du "théorème de la base extraite", en considérant la famille génératrice formée de tous les vecteurs de E (cette famille est bien une sur-famille de la famille libre de départ).
- (ii) Découle aussi du même théorème, appliqué à la famille libre ℓ et à sa sur-famille (ℓ, g) (qui est génératrice de E car g l'est déjà).

IV SEV d'un espace vectoriel de dimension finie**Théorème 7 (Dimension d'un SEV)**

Si E est de dimension finie et si F est un SEV de E , alors :

- (i) *F est un $\mathbb{K}$ -EV de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$.*
- (ii) *$\dim(F) = \dim(E) \implies F = E$.*

Preuve

- (i) Notons $n = \dim(E)$ et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Les familles libres de F sont *a fortiori* des familles libres de E (qui est de dimension finie), donc toute famille libre de F est finie, de cardinal inférieur ou égal à n . On peut alors reprendre la démonstration du théorème de la base extraite, en raisonnant cette fois avec l'ensemble :

$$\mathcal{V} = \{ \text{familles libres dans } F \}$$

(non vide car la famille vide est libre dans F). Cela montre l'existence d'une famille libre de F de cardinal maximal, donc d'une base de F finie de cardinal $\leq n$, ce qui prouve le résultat.

- (ii) Si $\dim(F) = \dim(E)$, alors F possède une base de cardinal n , il s'agit en particulier d'une famille libre de E de cardinal maximal, donc d'une base de E . Cette famille engendre donc à la fois E et F , d'où l'égalité $F = E$.