

Convexité : rappels de MP2I et compléments

Table des matières

I	Parties convexes	4
II	Fonctions convexes	6
	1) Définition et propriétés	6
	2) Fonctions convexes dérivables	10
	3) Inégalités de convexité classiques	11

I Parties convexes

E désigne un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

La notion de barycentre est hors-programme, mais permet de comprendre la notion de convexité plus en profondeur.

Définition 1 (Barycentre, isobarycentre)

Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E et $(\lambda_i)_{i \in I}$ une famille finie de réels tels que $\sum_{i \in I} \lambda_i \neq 0$.

On appelle **barycentre de la famille (a_i) affecté des coefficients (λ_i)** le point :

$$m = \frac{1}{\sum_{i \in I} \lambda_i} \sum_{i \in I} \lambda_i a_i \in E.$$

On parle d'**isobarycentre** lorsque les coefficients $(\lambda_i)_{i \in I}$ sont tous égaux entre eux. Dans ce cas :

$$m = \frac{1}{\#I} \sum_{i \in I} a_i.$$

Vocabulaire

On dit aussi que m est le **barycentre du système pondéré $(a_i, \lambda_i)_{i \in I}$** .

Remarque

Le barycentre est inchangé si :

- on retire de la famille les vecteurs (a_i) affectés d'un coefficient nul ;
- on permute les couples (a_i, λ_i) ;
- on multiplie tous les coefficients λ_i par un même coefficient non nul.

On peut donc toujours se ramener au cas où $\sum_{i \in I} \lambda_i = 1$.

Propriété 2 (Associativité du barycentre)

Soit I un ensemble fini et I_1, I_2 des parties de I telles que $I_1 \cup I_2 = I$, $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.

Soit une famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ de réels telle que $\sum_{i \in I_1} \lambda_i \neq 0$ et $\sum_{i \in I_2} \lambda_i \neq 0$.

Si m_1 est le barycentre de $(a_i, \lambda_i)_{i \in I_1}$ et m_2 est le barycentre de $(a_i, \lambda_i)_{i \in I_2}$, alors le barycentre m de $(a_i, \lambda_i)_{i \in I}$ est aussi le barycentre de $\left((m_1, \sum_{i \in I_1} \lambda_i), (m_2, \sum_{i \in I_2} \lambda_i) \right)$.

Preuve

Posons $\mu_k = \sum_{i \in I_k} \lambda_i \neq 0$ pour $k \in \{1, 2\}$. Par hypothèse :

$$m_1 = \frac{1}{\mu_1} \sum_{i \in I_1} \lambda_i a_i, \quad m_2 = \frac{1}{\mu_2} \sum_{i \in I_2} \lambda_i a_i,$$

donc

$$m = \frac{1}{\sum_{i \in I} \lambda_i} \sum_{i \in I} \lambda_i a_i = \frac{1}{\sum_{i \in I_1} \lambda_i + \sum_{i \in I_2} \lambda_i} \left(\sum_{i \in I_1} \lambda_i a_i + \sum_{i \in I_2} \lambda_i a_i \right) = \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2).$$

Définition 3 (Segment)

Etant donnés deux points a et b de E , on appelle **segment** $[a, b]$ l'ensemble des barycentres de (a, b) affectés de coefficients positifs :

$$[a, b] = \left\{ \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} (\lambda_1 a + \lambda_2 b), \lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 \neq 0 \right\}.$$

En se ramenant à une somme de coefficients égale à 1, cela se réécrit :

$$[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Remarque • Si E est un espace vectoriel normé, alors le segment $[a, b]$ définit un chemin dans E de a vers b , puisque l'application $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ définie par $\gamma(t) = (1 - t)a + tb$ est continue (car lipschitzienne, vu que $\|\gamma(t) - \gamma(u)\| = \|b - a\| \times |t - u|$) et vérifie $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$.

- Le point $\gamma(1/2) = \frac{a+b}{2}$ est l'isobarycentre de (a, b) , appelé **milieu** du segment $[a, b]$.

Dessin (Illustration de la paramétrisation du segment)**Définition 4 (Partie étoilée)**

Une partie $A \subset E$ est dite **étoilée** s'il existe un point $a \in A$ tel que pour tout $b \in A$, $[a, b] \subset A$.

Dessin (Partie étoilée)**Définition 5 (Partie convexe)**

Une partie $A \subset E$ est dite **convexe** si pour tout $(a, b) \in A^2$, $[a, b] \subset A$.

Remarque

A est convexe $\iff \forall (a, b) \in A^2, \forall \lambda \in [0, 1], (1 - \lambda)a + \lambda b \in A$.

Dessin (Partie convexe)

Exemple • $\emptyset$ et E sont convexes.

- Tout segment $[a, b] \subset E$ est convexe : en effet, si x, y sont dans $[a, b]$, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ tels que $x = (1 - \lambda_1)a + \lambda_1 b$ et $y = (1 - \lambda_2)a + \lambda_2 b$, donc pour tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = (1 - \lambda)((1 - \lambda_1)a + \lambda_1 b) + \lambda((1 - \lambda_2)a + \lambda_2 b)$$

$$= (1 - \lambda_1 - \lambda(\lambda_2 - \lambda_1))a + (\lambda_1 + \lambda(\lambda_2 - \lambda_1))b = (1 - t)a + tb,$$

avec $t = \lambda_1 + \lambda(\lambda_2 - \lambda_1) \in [0, 1]$ car :

* si $\lambda_1 \leq \lambda_2$, $0 \leq \lambda_1 \leq t \leq \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda_2 \leq 1$;

* si $\lambda_1 > \lambda_2$, $0 \leq \lambda_2 \leq t \leq \lambda_1 \leq 1$.

On a donc montré que $\forall (x, y) \in [a, b]^2$, $(1 - \lambda)x + \lambda y \in [a, b]$, donc $[a, b]$ est convexe.

- Tout sev F de E est convexe, car une combinaison convexe de deux vecteurs $((1 - \lambda)a + \lambda b$ avec $\lambda \in [0, 1]$) est un cas particulier de combinaison linéaire, et tout sev est stable par combinaison linéaire.
- Tout sous-espace affine X de E est convexe : si $X = \emptyset$, c'est évident. Si X est non vide, alors si on fixe $x_0 \in X$, on a $X = x_0 + F$, où F est un sev de E . Dans ce cas, pour tout $(x, y) \in X^2$, on a $x = x_0 + a$ et $y = x_0 + b$ avec $(a, b) \in F^2$, donc pour tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$(1 - \lambda)x + \lambda y = x_0 + \underbrace{(1 - \lambda)a + \lambda b}_{\in F} \in X.$$

Propriété 6 (Convexité des boules dans un evn)

Soit E un espace vectoriel normé. Toute boule (ouverte ou fermée) est convexe.

Preuve

Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrons que la boule ouverte $B(a, r)$ est convexe.

Etant donnés x, y dans $B(a, r)$, on a $\|x - a\| < r$ et $\|y - a\| < r$, donc pour tout $\lambda \in [0, 1]$:

$$\|(1 - \lambda)x + \lambda y - a\| = \|(1 - \lambda)(x - a) + \lambda(y - a)\| \leq (1 - \lambda)\|x - a\| + \lambda\|y - a\| < (1 - \lambda)r + \lambda r = r,$$

ce qui montre bien que $(1 - \lambda)x + \lambda y \in B(a, r)$. On procède de même pour la boule fermée $\overline{B(a, r)}$.

Propriété 7 (Lien entre convexité et connexité par arcs)

Soit E un espace vectoriel normé et $A \subset E$ une partie non vide. Alors :

A convexe $\implies A$ étoilée $\implies A$ connexe par arcs.

Preuve

Si A est convexe, fixons un point $a \in A$ (possible car $A \neq \emptyset$). Alors pour tout $b \in A$, on a $[a, b] \subset A$ par convexité, donc A est étoilée.

Si A est étoilée, alors pour tous points $(x, y) \in A^2$, on a $[a, x] \subset A$ et $[a, y] \subset A$, donc il existe un chemin dans A de a vers x , et un chemin dans A de a vers y . Ainsi, par transitivité, il existe un chemin dans A de x vers y , ce qui montre que A est connexe par arcs.

Propriété 8 (Caractérisation des parties convexes)

Soit $A \subset E$. On a équivalence entre :

(i) A est convexe ;

(ii) tout barycentre de points de A à coefficients positifs appartient à A .

Preuve

$(ii) \implies (i)$

Si a, b sont dans A , alors tout point du segment $[a, b]$ est un barycentre de (a, b) à coefficients positifs, donc appartient à A d'après (ii). Donc $[a, b] \subset A$, ce qui montre que A est convexe.

$(i) \implies (ii)$

Supposons A convexe et montrons la propriété (ii) par récurrence sur le nombre de points $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ considérés.

Si $n = 1$, il n'y a rien à montrer.

Si $n = 2$, c'est direct car tout barycentre de (a_1, a_2) à coefficients positifs est un point du segment $[a_1, a_2]$, donc appartient à A par convexité.

Supposons la propriété (ii) vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons-la pour $n + 1$ points de A , notés $(a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$. Soient des coefficients positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \neq 0$, et soit m le barycentre de $(a_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n+1}$. On peut supposer que $\forall i \in \{1, \dots, n+1\}, \lambda_i > 0$ (sinon, un des λ_i est nul et m se réécrit comme barycentre de n points, d'où $m \in A$ par hypothèse de récurrence). Par associativité du barycentre (cf. prop. 2), m est aussi le barycentre de $((b, \mu), (a_{n+1}, \lambda_{n+1}))$, où b est le barycentre de $(a_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$. Par hypothèse de récurrence, $b \in A$, et vu qu'on a aussi $a_{n+1} \in A$, on déduit par le cas $n = 2$ que m est dans A , en tant que barycentre à coefficients positifs de deux points de A .

II Fonctions convexes

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1) Définition et propriétés

Définition 9 (Fonction convexe)

*Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **convexe** lorsque*

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f((1 - \lambda)a + \lambda b) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Remarque

Il suffit que l'inégalité précédente soit vérifiée pour tout $a \neq b$ dans I^2 et pour tout $\lambda \in]0, 1[$ pour que f soit convexe. En effet, l'inégalité est toujours vraie si $a = b$ ou $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ (c'est une égalité dans ces cas).

Dans la suite, on supposera **I d'intérieur non vide** (dans les autres cas, I est vide ou singleton, donc $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est automatiquement convexe dans ces cas triviaux).

Rappel (Graphe d'une fonction)

Le graphe de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in I \text{ et } y = f(x)\}.$$

Propriété 10 (Caractérisation de la convexité par la position relative du graphe et des cordes)

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a \neq b$, le graphe de $f|_{[a,b]}$ est situé en dessous de la corde joignant les points d'abscisse a et b .

Preuve

Fixons $(a, b) \in I^2$ distincts et notons $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ les points du graphe de f d'abscisses respectives a et b . La corde joignant A et B est le segment $[A, B]$:

$$[A, B] = \{(1 - \lambda)A + \lambda B, \lambda \in [0, 1]\} = \{((1 - \lambda)a + \lambda b, (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)), \lambda \in [0, 1]\}.$$

Etant donné un point quelconque $M = (x_M, y_M)$ de la corde $[A, B]$, le fait que f soit convexe se traduit donc par

$$f(x_M) \leq y_M,$$

c'est-à-dire que M est situé au-dessus du point $N = (x_M, f(x_M))$ qui est le point du graphe de f de même abscisse.

Exemple

La fonction "valeur absolue" $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe.

Toute fonction affine est convexe.

Définition 11 (Fonction concave)

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite **concave** lorsque

$$\forall (a, b) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f((1 - \lambda)a + \lambda b) \geq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b).$$

Remarque

f est concave ssi pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a \neq b$, le graphe de $f|_{[a,b]}$ est situé au-dessus de la corde joignant les points d'abscisse a et b .

Propriété 12 (Lien entre convexité et concavité)

f est concave $\iff -f$ est convexe.

Preuve

Multiplier une inégalité par -1 change son sens.

ATTENTION !

Il existe des fonctions ni convexes ni concaves ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$ par exemple).

Les fonctions affines sont à la fois convexes et concaves.

Définition 13 (Épigraphe d'une fonction)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. On appelle **épigraphe** de f l'ensemble :

$$\text{Epi}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in I \text{ et } y \geq f(x)\}.$$

Remarque

$\text{Epi}(f)$ est la partie du plan située au-dessus du graphe de f .

Propriété 14 (Caractérisation de la convexité par l'épigraphe)

Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si son épigraphe $\text{Epi}(f)$ est convexe.

Preuve $\Rightarrow$ Supposons f convexe. Soit $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points de $\text{Epi}(f)$. On a $f(x_A) \leq y_A$ et $f(x_B) \leq y_B$. Considérons un point C du segment $[A, B]$:

$$C = (x_C, y_C) = (1 - \lambda)A + \lambda B = ((1 - \lambda)x_A + \lambda x_B, (1 - \lambda)y_A + \lambda y_B).$$

Par convexité de f , on a

$$f(x_C) = f((1 - \lambda)x_A + \lambda x_B) \leq (1 - \lambda)f(x_A) + \lambda f(x_B) \leq (1 - \lambda)y_A + \lambda y_B = y_C,$$

donc $C \in \text{Epi}(f)$, ce qui prouve que $\text{Epi}(f)$ est convexe.

$\Leftarrow$ Supposons $\text{Epi}(f)$ convexe. Pour tous $(a, b) \in I^2$ distincts, les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ sont dans $\text{Epi}(f)$ (car sur le graphe de f), donc $[A, B] \subset \text{Epi}(f)$ par hypothèse. Cela signifie que la corde $[A, B]$ est située au-dessus du graphe de $f|_{[a, b]}$, et donc f est convexe par la prop. 10.

Propriété 15 (Inégalité de Jensen)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour toutes familles $(a_1, \dots, a_n) \in I^n$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i).$$

Preuve (Preuve "classique")

Par récurrence sur n .

Pour $n = 1$, il n'y a rien à faire (on a égalité).

Pour $n = 2$, c'est directement la définition de la convexité de f puisque $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$, donc

$$f(\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2) = f((1 - \lambda_2)a_1 + \lambda_2 a_2) \leq (1 - \lambda_2)f(a_1) + \lambda_2 f(a_2) = \lambda_1 f(a_1) + \lambda_2 f(a_2).$$

Soit $n \geq 2$. On suppose l'inégalité vraie pour n points. Montrons-la pour $n+1$ points : soit $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in I^{n+1}$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Si un des λ_i est nul, alors l'inégalité est vraie car on se ramène au cas de n points.

Si $\lambda_i > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n+1\}$, alors en posant $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$, on a $\lambda_{n+1} = 1 - \lambda$, donc par convexité de f :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i\right) = f\left(\lambda \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} a_i\right) + (1 - \lambda)a_{n+1}\right) \leq \lambda f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} a_i\right) + (1 - \lambda)f(a_{n+1}).$$

Or, par hypothèse de récurrence appliquée à la famille $(a_1, \dots, a_n)$ avec les coefficients $(\frac{\lambda_i}{\lambda})_{1 \leq i \leq n}$ (qui sont bien positifs et de somme 1), on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda} f(a_i) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i),$$

donc finalement

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i) + \lambda_{n+1} f(a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(a_i),$$

ce qui montre l'hérédité.

Preuve (Preuve géométrique)

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, considérons le point $A_i = (a_i, f(a_i)) \in \mathbb{R}^2$. Chaque point A_i appartient au graphe de f , donc à son épigraphe. La fonction f étant convexe, l'épigraphe de f est convexe, donc contient aussi le barycentre du système $(A_i, \lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$, c'est-à-dire le point :

$$M = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i, \sum_{i=1}^n \lambda_i f(a_i) \right) = (x_M, y_M).$$

Et le fait que $M \in \text{Epi}(f)$ se traduit par $f(x_M) \leq y_M$, c'est-à-dire l'inégalité de Jensen.

Définition 16 (Fonction pente en un point x_0)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On appelle **fonction pente en x_0** (ou **taux d'accroissement en x_0**) la fonction $p_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\}, \quad p_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Remarque

Pour $(x, y) \in I^2$ distincts, on a $p_x(y) = p_y(x)$.

Propriété 17 (Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes)

$f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $x_0 \in I$, la fonction $p_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante.

Preuve $\Rightarrow$ Supposons f convexe et fixons trois points distincts $(x_0, x, y) \in I^3$ avec $x < y$.

Montrons que $p_{x_0}(x) \leq p_{x_0}(y)$.

* si $x_0 < x < y$, alors il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $x = (1 - \lambda)x_0 + \lambda y$, donc par convexité de f :

$$f(x) \leq (1 - \lambda)f(x_0) + \lambda f(y).$$

Vu que $x - x_0 > 0$, on peut majorer la pente :

$$p_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \frac{\lambda(f(y) - f(x_0))}{x - x_0} = \frac{\lambda(f(y) - f(x_0))}{\lambda(y - x_0)} = p_{x_0}(y).$$

* si $x < x_0 < y$, alors d'après le premier cas (en permutant les rôles des variables) :

$$p_{x_0}(x) = p_x(x_0) \leq p_x(y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

Or, il existe $\lambda \in]0, 1[$ tel que $x_0 = (1 - \lambda)x + \lambda y$, donc par convexité de f :

$$f(x_0) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

On en déduit (vu que $y - x_0 > 0$) la minoration :

$$p_{x_0}(y) = \frac{f(y) - f(x_0)}{y - x_0} \geq \frac{f(y) - (1 - \lambda)f(x) - \lambda f(y)}{y - x_0} = \frac{(1 - \lambda)(f(y) - f(x))}{(1 - \lambda)(y - x)} = p_x(y),$$

donc finalement, $p_{x_0}(x) \leq p_x(y) \leq p_{x_0}(y)$.

* si $x < y < x_0$, alors d'après le deuxième cas (en permutant les rôles des variables) :

$$p_y(x) \leq p_x(x_0) \leq p_y(x_0),$$

donc $p_{x_0}(x) = p_x(x_0) \leq p_y(x_0) = p_{x_0}(y)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que pour tout $x_0 \in I$, la fonction $p_{x_0} : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante et montrons que f est convexe. Pour cela fixons $a < b$ dans I et $\lambda \in]0, 1[$. En posant $c = (1 - \lambda)a + \lambda b$, on a $a < c < b$, donc par hypothèse :

$$p_a(c) \leq p_a(b),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

En multipliant par $c - a > 0$, cela revient à :

$$f(c) - f(a) \leq \frac{c - a}{b - a}(f(b) - f(a)) = \lambda(f(b) - f(a)),$$

c'est-à-dire $f(c) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b)$, et donc f est convexe.

Corollaire 18 (Inégalité des trois pentes)

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, alors pour tous points $x < y < z$ dans I , on a :

$$p_x(y) \leq p_x(z) \leq p_y(z).$$

Preuve

D'après la proposition précédente, p_x est croissante donc $p_x(y) \leq p_x(z) = p_z(x)$.

Mais p_z est également croissante, donc $p_z(x) \leq p_z(y) = p_y(z)$, ce qui montre la double inégalité voulue.

2) Fonctions convexes dérivables

Théorème 19 (Caractérisation des fonctions convexes dérivables)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors, f est convexe ssi f' est croissante.

Preuve $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f convexe. Fixons $x < y$ dans I et montrons que $f'(x) \leq f'(y)$.

Pour tout point z tel que $x < z < y$, on a l'inégalité des trois pentes :

$$p_x(z) \leq p_x(y) \leq p_z(y) = p_y(z),$$

c'est-à-dire

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq p_x(y) \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Puisque f est dérivable en tout point de I , on a

$$\lim_{z \rightarrow x^+} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(x), \quad \lim_{z \rightarrow y^-} \frac{f(z) - f(y)}{z - y} = f'(y),$$

donc par passage à la limite lorsque $z \rightarrow x^+$ puis lorsque $z \rightarrow y^-$ dans les inégalités précédentes (séparément !), on obtient $f'(x) \leq p_x(y)$, puis $p_x(y) \leq f'(y)$, donc $f'(x) \leq f'(y)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons f' croissante. Etant donnés $a < b$ dans I et $\lambda \in]0, 1[$, on pose $c = (1 - \lambda)a + \lambda b$. On a alors $a < c < b$, donc en appliquant l'égalité des accroissements finis sur les segments $[a, c]$ et $[c, b]$ (sur lesquels f est bien dérivable), il existe $x_a \in]a, c[$ et $x_b \in]c, b[$ tels que

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(x_a), \quad \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = f'(x_b).$$

Vu que $a < x_a < c < x_b < b$, on obtient par croissance de f' l'inégalité $f'(x_a) \leq f'(x_b)$, c'est-à-dire :

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c},$$

ou encore

$$\frac{f(c) - f(a)}{\lambda(b - a)} \leq \frac{f(b) - f(c)}{(1 - \lambda)(b - a)}.$$

En multipliant par $\lambda(1 - \lambda)(b - a) > 0$, on en déduit :

$$(1 - \lambda)(f(c) - f(a)) \leq \lambda(f(b) - f(c)),$$

c'est-à-dire

$$f(c) \leq (1 - \lambda)f(a) + \lambda f(b),$$

et donc f est bien convexe.

Corollaire 20 (Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Alors, f est convexe ssi $f'' \geq 0$.

Preuve

Immédiat d'après la proposition précédente car sous ces hypothèses, f' croissante équivaut à $(f')' \geq 0$ (vu que I est un intervalle).

Remarque

On a aussi :

$$f \text{ concave} \iff (-f) \text{ convexe} \iff (-f)'' = -f'' \geq 0 \iff f'' \leq 0.$$

Propriété 21 (Position relative du graphe et des tangentes)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable et convexe. Alors, le graphe de f est situé entièrement au-dessus de toutes ses tangentes.

Preuve

Fixons $a \in I$. Une équation cartésienne de la tangente au graphe de f en a est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

Dans la preuve du théorème 19, nous avons montré que sous ces hypothèses, on a pour tout $x \in I$:

$$x < a \implies \frac{f(a) - f(x)}{a - x} = p_x(a) \leq f'(a) \xRightarrow{(x-a < 0)} f(x) - f(a) \geq (x - a)f'(a),$$

$$a < x \implies f'(a) \leq p_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xRightarrow{(x-a > 0)} f(x) - f(a) \geq (x - a)f'(a).$$

Donc pour tout $x \in I \setminus \{a\}$, on a l'inégalité $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$, et elle reste vraie pour $x = a$.

Remarque

Le graphe d'une fonction concave est situé entièrement en dessous de ses tangentes.

3) Inégalités de convexité classiques

- La fonction $\ln$ est concave, donc son graphe est en-dessous de sa tangente en $x = 1$, c'est-à-dire

$$\forall x > 0, \quad \ln(x) \leq x - 1.$$

- La fonction $\exp$ est convexe, donc son graphe est au-dessus de sa tangente en $x = 0$, c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1 + x.$$

- La fonction $\sin$ est concave sur $[0, \pi/2]$, donc son graphe est au-dessus de la corde joignant les points $(0, 0)$ et $(\pi/2, 1)$ et en-dessous de la tangente en $x = 0$, ce qui donne l'encadrement :

$$\forall x \in [0, \pi/2], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x.$$

- Inégalité arithmético-géométrique : pour tous réels $a_1, \dots, a_n \geq 0$:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n} (a_1 + \cdots + a_n)$$

(utiliser l'inégalité de Jensen avec la fonction convexe $-\ln$ et les coefficients $\lambda_i = 1/n$).

- Inégalité de Young (qui résulte elle aussi de la concavité de $\ln$)

$$\forall (p, q) \in]1, +\infty[^2, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \implies \forall (a, b) \in]0, +\infty[^2, \quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(qui sert notamment à montrer l'inégalité de Hölder).