

Fonctions réelles - Dérivabilité

Table des matières

I	Dérivée et extremum local	4
II	Rolle, accroissements finis et lien entre dérivée et monotonie	4
III	Prolongement d'une dérivée	7
IV	Dérivation composée	8
V	Théorème du difféomorphisme	9
VI	Complément (hors programme) : le théorème de Darboux	10

On ne considère ici que des intervalles I non vides et non réduits à un singleton (on dit que I est **d'intérieur non vide**).

I Dérivée et extremum local

Théorème 1 (Condition nécessaire d'extremum local)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Si f admet un extremum local en $a \in I$, si **a n'est pas une extrémité de I** et si f est dérivable en a , alors $f'(a) = 0$.

Preuve

Par hypothèse de dérivabilité de f en a , on a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f'(a) \in \mathbb{R}.$$

Pour déterminer le signe de cette limite, on peut procéder par restriction "à gauche" et "à droite" : en effet, a n'est pas une extrémité de I , donc il existe $\delta > 0$ tel que $]a - \delta, a + \delta[\subset I$ (on dit que I est un **voisinage** de a , ou encore que a est un **point intérieur** de I).

Supposons que f admette un minimum local en a : il existe donc un voisinage $]a - \delta', a + \delta'[,$ (avec $0 < \delta' < \delta$ quitte à diminuer δ') sur lequel $f(x) \geq f(a)$. Alors :

$$x \in]a - \delta', a[\implies \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0$$

(numérateur positif et dénominateur strictement négatif), donc en passant à la limite à gauche, on obtient :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

En procédant de même sur $]a, a + \delta'[,$ on obtient

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0,$$

donc finalement $f'(a) = 0$.

On procède de même pour un maximum local en a , le signe du numérateur sera inversé.

ATTENTION !

- La réciproque est fautive : la fonction $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifie $f'(0) = 0$ mais n'admet pas d'extremum local en 0 (puisque'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).
La condition $f'(a) = 0$ n'est donc pas suffisante pour l'existence d'un extremum local en a .
- Le théorème ne marche pas si a est une extrémité de I : la démonstration donne seulement le signe de $f'(a)$ dans ce cas, et non pas $f'(a) = 0$ (puisque la limite est seulement une limite à gauche ou à droite dans ce cas). Par exemple, la fonction $f : x \mapsto x$ définie sur $[0, 1]$ admet un minimum local (et même global) en 0, alors que $f'(0) = 1 \neq 0$.

II Rolle, accroissements finis et lien entre dérivée et monotonie

Théorème 2 (Théorème de Rolle)

Soient $a < b$ réels. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Preuve

Par continuité de f sur le segment $[a, b]$, f est bornée et atteint ses bornes : il existe c, d dans $[a, b]$ tels que

$$f(c) = \min_{[a,b]} f = m, \quad f(d) = \max_{[a,b]} f = M.$$

Deux cas se présentent alors :

- Si c ou d est dans $]a, b[$, alors f admet un extremum local (car global) en un point qui n'est pas une extrémité de $[a, b]$, donc d'après le théorème précédent, $f'(c) = 0$ ou $f'(d) = 0$.
- Si $\{c, d\} = \{a, b\}$, alors $m = f(a) = f(b) = M$, donc f est constante. Dans ce cas trivial, on a $f' = 0$ sur $]a, b[$.

Dans tous les cas, f' s'annule au moins une fois sur $]a, b[$.

Théorème 3 (Égalité des accroissements finis)

Soient $a < b$ réels. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Remarque

Cela signifie qu'il existe un point $c \in]a, b[$ en lequel la tangente au graphe de f (de pente $f'(c)$) est parallèle à la corde joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ (puisque de même pente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$).

Preuve

Il suffit de se ramener au théorème de Rolle (il nous manque l'hypothèse $f(a) = f(b)$). L'écart vertical φ entre le graphe de f et la corde joignant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ vérifie les bonnes hypothèses :

$$\varphi : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{cases} \quad \begin{matrix} \mathbb{R} \\ \varphi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a) \end{matrix}$$

(φ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, puisque la corde coïncide avec le graphe de f en a et en b). Il existe donc $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$, c'est-à-dire $f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.

ATTENTION !

Le théorème de Rolle et l'égalité des AF sont faux pour des fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou dans un espace vectoriel de dimension finie). Par exemple : $f : t \mapsto e^{it}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifie $f(0) = 1 = f(2\pi)$, mais $f' : t \mapsto ie^{it}$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

Ce sont des théorèmes spécifiques aux fonctions d'une variable réelle et à valeurs réelles.

Corollaire 4 (Inégalité des accroissements finis)

Soient $a < b$ réels. Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, alors

$$\exists(m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in]a, b[, m \leq f'(x) \leq M \implies m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Remarque

On a aussi (sous les mêmes hypothèses) :

$$\exists K \geq 0, \forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leq K \implies |f(b) - f(a)| \leq K(b-a).$$

Preuve

Direct d'après l'égalité des accroissements finis, en multipliant l'inégalité $m \leq f'(c) \leq M$ par $b-a > 0$.

Remarque

A la différence du théorème de Rolle et de l'égalité des AF, l'inégalité des AF restera vraie pour les fonctions dérivables d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$ (sous la forme de la remarque précédente, avec des modules à la place des valeurs absolues) ou à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie (avec des normes, voir cours MPI), mais sa démonstration est différente (puisque les notions de minimum et maximum n'ont plus de sens dans ce contexte plus général).

Théorème 5 (Lien entre dérivée et monotonie)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

- (i) f est croissante $\iff f' \geq 0$ sur I ;
- (ii) f est décroissante $\iff f' \leq 0$ sur I ;
- (iii) f est constante $\iff f' = 0$ sur I .

Preuve

Traitons seulement le point (i), les deux autres sont similaires.

- Si f est croissante, alors

$$\forall a \in I, \forall x \in I \setminus \{a\}, \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0$$

(étudier les signes du numérateur et du dénominateur en distinguant les cas $x < a$ et $x > a$), donc en passant à la limite quand $x \rightarrow a$, on obtient $f'(a) \geq 0$ pour tout $a \in I$.

- Si $f' \geq 0$ sur I , alors étant donnés deux points $a < b$ dans I , il existe par l'égalité des accroissements finis un réel $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c) \times (b - a) \geq 0$, donc $f(b) \geq f(a)$.
On conclut que f est croissante.

Remarque

- L'égalité des AF, même si elle est spécifique aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, est donc un résultat très important puisque c'est sur elle que repose le principe bien connu suivant : "le signe de f' donne la monotonie de f ".
- Le résultat précédent peut-être affaibli : si f est continue sur I et seulement dérivable sur l'intérieur de I (noté $\overset{\circ}{I}$, il s'agit de I privé de ses extrémités, donc d'un intervalle ouvert), alors :

$$f \text{ est croissante sur } I \iff f' \geq 0 \text{ sur } \overset{\circ}{I}.$$

On le voit dans la preuve, car le point c fourni par l'égalité des AF est dans $\overset{\circ}{I}$.

On dispose aussi d'une version "stricte" du théorème précédent :

Théorème 6 (Lien entre dérivée et stricte monotonie)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

- (i) f est strictement croissante $\iff f' \geq 0$ sur I et $\{x \in I, f'(x) = 0\}$ est d'intérieur vide ;
(c'est-à-dire que cet ensemble ne contient aucun intervalle non vide et non singleton).
- (ii) f est strictement décroissante $\iff f' \leq 0$ sur I et $\{x \in I, f'(x) = 0\}$ est d'intérieur vide ;
- (iii) En particulier si $f' > 0$ sur I , alors f est strictement croissante.
- (iv) En particulier si $f' < 0$ sur I , alors f est strictement décroissante.

ATTENTION !

Les implications réciproques des points (iii) et (iv) sont fausses !

Par exemple, $x \mapsto x^3$ est de dérivée nulle en 0, mais est tout de même strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve

Traitons seulement le point (i), les autres sont similaires. Notons $Z = \{x \in I, f'(x) = 0\}$ l'ensemble des zéros de f' .

- Si f est strictement croissante, alors elle est croissante donc $f' \geq 0$ sur I . Montrons que Z est d'intérieur vide. Si ce n'est pas le cas, alors il existe un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$ sur lequel f' est nulle, donc (par le théorème précédent), f est constante sur $[a, b]$, impossible car on a $f(a) < f(b)$ par hypothèse de stricte croissance. Donc Z est d'intérieur vide.
- Si $f' \geq 0$ et Z d'intérieur vide, alors f est déjà croissante. Montrons que cette croissance est stricte. Si ce n'est pas le cas, il existe $a < b$ dans I tels que $f(a) = f(b)$. Par croissance, on a alors f constante sur $[a, b]$, et donc f' est nulle sur $]a, b[$, c'est-à-dire $]a, b[\subset Z$, et c'est contradictoire. Donc f est strictement croissante.

Remarque

Là aussi, on peut affaiblir le résultat en supposant seulement que f est continue sur I et dérivable sur $\overset{\circ}{I}$. Dans ce cas :

f est strictement croissante sur $I \iff f' \geq 0$ sur $\overset{\circ}{I}$ et $\{x \in \overset{\circ}{I}, f'(x) = 0\}$ est d'intérieur vide.

C'est pourquoi j'ai indiqué dans la preuve précédente que

$$"f \text{ constante sur } [a, b] \implies f' = 0 \text{ sur }]a, b[",$$

alors qu'on a aussi $f' = 0$ sur $[a, b]$ mais en me contentant de l'intervalle ouvert, j'ai seulement besoin de la dérivabilité sur $\overset{\circ}{I}$ pour faire marcher la preuve !

III Prolongement d'une dérivée

Voici une autre application classique de l'égalité des AF, qui donne une condition suffisante de dérivabilité :

Théorème 7 (Théorème de prolongement de la dérivée)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $I \setminus \{a\}$ (avec $a \in I$).

Si f est continue en a et si $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

En particulier :

- (i) si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a avec $f'(a) = \ell$;
- (ii) si $\ell \in \{\pm\infty\}$, alors f n'est pas dérivable en a (demi-tangente verticale).

Preuve

Traitons seulement le cas $\ell \in \mathbb{R}$, l'autre est similaire.

Par définition d'une limite : étant donné un réel $\varepsilon > 0$, il existe par hypothèse un réel $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in I, \quad |y - a| \leq \delta \implies |f'(y) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \neq a$ dans I . La fonction f est continue sur le segment d'extrémités a, x et dérivable sur l'intérieur de ce segment, donc par l'égalité des AF, il existe un réel $c_{a,x} \in]a, x[$ (ou $]x, a[$) tel que

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| = |f'(c_{a,x}) - \ell|.$$

Puisque $|c_{a,x} - a| \leq |x - a|$ (faire un dessin !), on a

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad |x - a| \leq \delta \implies |c_{a,x} - a| \leq \delta \implies |f'(c_{a,x}) - \ell| \leq \varepsilon \implies \left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \ell \right| \leq \varepsilon,$$

et donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

ATTENTION !

La condition n'est pas nécessaire ! Il se peut très bien que f soit dérivable en a sans que f' n'ait une limite (finie ou infinie) en a . On pourra s'en convaincre en étudiant l'exemple $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ (prolongée continûment en 0).

Ceci explique l'existence de fonctions dérivables mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Corollaire 8 (Prolongement du caractère $\mathcal{C}^1$)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$.

Si f est continue en a et si f' se prolonge continûment en a , alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

Preuve

Par le théorème précédent, f est dérivable en a avec $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f'(x)$, donc la dérivée f' (qui était définie et continue sur $I \setminus \{a\}$) s'est prolongée continûment en a . Ainsi, f' est continue sur I , et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .

IV Dérivation composée

Théorème 9 (Dérivation composée)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur des intervalles réels I et J tels que $f(I) \subset J$. On suppose que f est dérivable en $a \in I$ et g est dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \times f'(a).$$

Preuve (En faisant apparaître l'accroissement de f)

L'hypothèse $f(I) \subset J$ garantit que $g \circ f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie.

Nous avons, pour tout $x \in I \setminus \{a\}$:

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \begin{cases} \frac{g(f(x)) - g(f(a))}{f(x) - f(a)} \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a} & \text{si } f(x) \neq f(a) \\ 0 & \text{si } f(x) = f(a) \end{cases}$$

Essayons de passer à la limite lorsque $x \rightarrow a$ dans cette quantité, en essayant de simplifier la disjonction de cas. On pose $b = f(a)$ et on introduit la fonction $\varphi : y \mapsto \frac{g(y) - g(b)}{y - b}$, définie sur $J \setminus \{b\}$.

Par hypothèse de dérivabilité de g en b , φ se prolonge continûment en b en posant

$$\varphi(b) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} = g'(b).$$

Le taux d'accroissement de $g \circ f$ en a s'exprime alors facilement en fonction de φ (sans disjonction de cas) :

$$\forall x \in I \setminus \{a\}, \quad \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} = \varphi(f(x)) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(les deux quantités valant 0 lorsque $f(x) = f(a)$).

Par continuité de φ en b et continuité de f en a (acquise par dérivabilité de f en a), on obtient par composée de limites que $\varphi(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \varphi(f(a)) = \varphi(b)$, et donc par produit de limites :

$$\frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \varphi(b) \times f'(a) = g'(b) \times f'(a),$$

ce qui montre le résultat.

Preuve (Avec des DL_1)

On rappelle qu'une fonction est dérivable en a ssi elle possède un DL_1 en a , et dans ce cas le DL_1 a pour coefficients $f(a)$ et $f'(a)$ (facile à montrer).

Par hypothèse de dérivabilité de f en a , on a :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \quad a + h \in I \implies f(a + h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h),$$

où ε_1 est une fonction de limite nulle en 0 (définie sur un quelconque voisinage de 0). De même, par hypothèse de dérivabilité de g en $b = f(a)$, on a :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad b + u \in J \implies g(b + u) = g(b) + ug'(b) + u\varepsilon_2(u),$$

où ε_2 est également de limite nulle en 0. En composant, on obtient pour h tel que $a + h \in I$:

$$(g \circ f)(a + h) = g(f(a) + hf'(a) + h\varepsilon_1(h)),$$

c'est-à-dire, en notant $u(h) = hf'(a) + h\varepsilon_1(h)$:

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a + h) &= g(b) + u(h)g'(b) + u(h)\varepsilon_2(u(h)) \\ &= g(b) + hf'(a)g'(b) + h(\varepsilon_1(h)g'(b) + f'(a)\varepsilon_2(u(h)) + \varepsilon_1(h)\varepsilon_2(u(h))) \end{aligned}$$

En notant $\varepsilon_3(h) = \varepsilon_1(h)g'(b) + f'(a)\varepsilon_2(u(h)) + \varepsilon_1(h)\varepsilon_2(u(h))$, on a

$$(g \circ f)(a + h) = (g \circ f)(a) + hf'(a)g'(b) + h\varepsilon_3(h),$$

avec $\varepsilon_3(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ (par composition de limites), donc $g \circ f$ possède un DL_1 en a , ce qui montre sa dérivabilité en a avec $(g \circ f)'(a) = f'(a)g'(b)$.

Théorème 10 (Composition de fonctions $\mathcal{C}^k$)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur des intervalles réels I et J tels que $f(I) \subset J$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$), alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

Preuve

Par récurrence sur k .

- Initialisation ($k = 1$) : si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, alors elles sont dérivables, donc par le théorème précédent, $g \circ f$ est dérivable avec $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$. Les fonctions f, f', g' étant continues, on déduit par composition et produit que $(g \circ f)'$ est continue, donc $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.
- Hérédité. Supposons le résultat vrai pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$ et montrons-le pour $k + 1$.
Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^{k+1}$, alors elles sont dérivables, ainsi que $g \circ f$, avec $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$. Les fonctions g' et f sont de classe $\mathcal{C}^k$, donc par hypothèse de récurrence, la composée $g' \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^k$. Par produit avec f' (également de classe $\mathcal{C}^k$), on en déduit $(g \circ f)'$ de classe $\mathcal{C}^k$, donc $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^{k+1}$.

V Théorème du difféomorphisme**Propriété 11 (Dérivabilité d'une fonction réciproque)**

Soit $f : I \rightarrow J$ une bijection entre deux intervalles de $\mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en $a \in I$. Alors, on a l'équivalence :

$$f^{-1} : J \rightarrow I \text{ est dérivable en } f(a) \iff (f^{-1} \text{ est continue en } f(a) \text{ et } f'(a) \neq 0),$$

et dans ce cas, $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.

Preuve

Notons $b = f(a) \in J$.

- Si f^{-1} est dérivable en b , alors elle est nécessairement continue en b . De plus, on a $f^{-1} \circ f = Id_I$, donc par dérivation composée au point a , on a :

$$(f^{-1})'(f(a)) \times f'(a) = 1,$$

ce qui impose $f'(a) \neq 0$ et donne la formule voulue.

- Supposons f^{-1} continue en b et $f'(a) \neq 0$. Étudions la dérivabilité de $f^{-1} : J \rightarrow I$ en b . Pour tout $y \in J \setminus \{b\}$, on a

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)},$$

et $f^{-1}(y) - a \neq 0$ (par injectivité de f^{-1}), donc on peut réécrire :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a}}.$$

On conclut par composition de limites : $f^{-1}(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} a$ (par continuité de f^{-1} en b), donc

$\frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} \xrightarrow{y \rightarrow b} f'(a)$ (par dérivabilité de f en a). Puisqu'on a supposé $f'(a) \neq 0$, on conclut que $\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} \xrightarrow{y \rightarrow b} \frac{1}{f'(a)}$, ce qui montre que f^{-1} est dérivable en b , avec $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Définition 12 (Difféomorphisme)

Si I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, on appelle **difféomorphisme** de I sur J toute bijection $f : I \rightarrow J$ telle que f et f^{-1} sont dérivables.

Théorème 13 (Théorème du difféomorphisme)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, strictement monotone avec $f' \neq 0$ sur I .

Alors $J = f(I)$ est un intervalle, $f : I \rightarrow J$ est bijective et $f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable avec $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Remarque

Sous ces conditions, f est donc un difféomorphisme de I sur J .

Preuve

f est continue et strictement monotone sur I donc le théorème de l'homéomorphisme s'applique : $J = f(I)$ est un intervalle et f réalise un homéomorphisme de I sur J (bijection continue, de réciproque continue).

En outre, $f : I \rightarrow J$ est dérivable, $f^{-1} : J \rightarrow I$ est continue et f' ne s'annule pas sur I , donc d'après la proposition précédente, $f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable en tout point, avec $\forall b \in J, (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$.

Théorème 14 (Théorème du difféomorphisme, version C^k)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

On suppose que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^k (avec $k \in \mathbb{N}^*$) avec $f' \neq 0$ sur I .

Alors $J = f(I)$ est un intervalle et $f : I \rightarrow J$ est un difféomorphisme avec $f^{-1} : J \rightarrow I$ de classe C^k .

Vocabulaire

On parle alors de " C^k -difféomorphisme".

Preuve

Puisque f est de classe C^1 , sa dérivée f' est continue et ne s'annule pas sur I , donc elle garde un signe constant strict (d'après le TVI), ce qui montre que f est strictement monotone. Ainsi, le théorème du difféomorphisme s'applique.

Reste à montrer que $f^{-1} : J \rightarrow I$ est elle-même de classe C^k , en utilisant l'expression $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

On montre par récurrence que f^{-1} est de classe C^j pour $j \in [1, k]$.

- Initialisation ($j = 1$) : f' est continue et f^{-1} aussi (car f difféomorphisme donc homéomorphisme), donc par composition et passage à l'inverse $(f^{-1})'$ est elle-même continue, donc f^{-1} est de classe C^1 .
- Hérédité : soit $1 \leq j < k$. On suppose que f^{-1} est de classe C^j . Puisque f est de classe C^k , on a f' de classe C^{k-1} , donc *a fortiori* de classe C^j . Par composition et passage à l'inverse, on conclut que $(f^{-1})'$ est de classe C^j , et donc f^{-1} est de classe C^{j+1} .

Finalement, f^{-1} est bien de classe C^k par récurrence finie.

VI Complément (hors programme) : le théorème de Darboux**Théorème 15 (Darboux)**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie la "propriété des valeurs intermédiaires", c'est-à-dire : $f'(I)$ est un intervalle.

ATTENTION !

Ce théorème ne dit pas que toute dérivée est continue ! (sinon, toute fonction dérivable serait de classe C^1 , et ce n'est pas le cas).

Même si certaines dérivées sont discontinues, elles ne peuvent pas "faire n'importe quoi" (elles vérifient quand même le TVI).

Preuve

Fixons $a < b$ dans I et un réel z tel que $f'(a) < z < f'(b)$ (l'autre cas $f'(b) < z < f'(a)$ est similaire). On va montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $z = f'(c)$. La stratégie est d'utiliser l'égalité des AF, en montrant d'abord que z peut s'écrire comme une pente $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

On considère donc les "fonctions pente" en a et en b :

$$p_a : \begin{cases}]a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & p_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}, \quad p_b : \begin{cases} [a, b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & p_b(x) = \frac{f(x)-f(b)}{x-b} \end{cases}.$$

Ces deux fonctions sont continues, et se prolongent continûment au segment $[a, b]$ (puisque f est dérivable en a et en b), en posant

$$p_a(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a), \quad p_b(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} = f'(b).$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, les images $p_a([a, b])$ et $p_b([a, b])$ sont deux intervalles, non disjoints car $p_a(b) = p_b(a)$, donc la réunion $J = p_a([a, b]) \cup p_b([a, b])$ est aussi un intervalle.

Puisque $f'(a) < z < f'(b)$, et que $(f'(a), f'(b)) = (p_a(a), p_b(b)) \in J^2$, on en déduit que $z \in J$.

Il existe donc ξ dans $]a, b[$ tel que $z = p_a(\xi)$ ou $z = p_b(\xi)$ (on a $\xi \notin \{a, b\}$ car $z \notin \{f'(a), f'(b)\}$).

Si par exemple $z = p_a(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}$ (l'autre cas est similaire), alors d'après l'égalité des AF, il existe $c \in]a, \xi[\subset]a, b[$ tel que $z = f'(c)$, ce qu'il fallait démontrer.