Fonctions réelles - Continuité

Table des matières

I Valeurs intermédiaires et cas monotone

Définition 1 (Intervalle réel)
Un **intervalle** *de* $\mathbb{R}$ *est une partie* $I \subset \mathbb{R}$ *telle que*

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \forall z \in \mathbb{R}, \qquad (x \leq z \leq y \implies z \in I).$$

Exemple
Ainsi, $\emptyset$, $[2,+\infty[$, $]0,1[$, $\mathbb{R}$ sont des intervalles, mais $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0,+\infty[$ n'en est pas un.

Théorème 2 (Théorème des valeurs intermédiaires ("TVI"))
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Si* $f : I \to \mathbb{R}$ *est continue, alors* $f(I)$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*.*

Remarque
Puisque les éléments de $f(I)$ *sont les* $x = f(a)$ *avec* $a \in I$*, on peut reformuler ce théorème :*

Enoncé équivalent du TVI *:*
Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*, soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *continue et soit* $(a,b) \in I^2$*,* $z \in \mathbb{R}$ *tels que* $a \leq b$ *et* $f(a) \leq z \leq f(b)$ *(ou* $f(b) \leq z \leq f(a)$*). Alors, il existe* $c \in I$ *(et même dans* $[a,b]$*) tel que* $z = f(c)$*.*

Preuve (Par dichotomie)
Fixons donc $(a,b) \in I^2$ et $z \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $f(a) \leq z \leq f(b)$ (le cas $f(b) \leq z \leq f(a)$ est similaire). En procédant par dichotomie, on va construire des suites adjacentes (a_n) et (b_n) à valeurs dans $[a,b]$, qui convergent vers un élément $c \in I$ tel que $f(c) = z$ (ce qui montrera bien que $z \in f(I)$, et donc que $f(I)$ est un intervalle).
On définit les suites (a_n) et (b_n) algorithmiquement. On initialise en posant :

$$a_0 = a, \qquad b_0 = b$$

(on a $f(a_0) \leq z \leq f(b_0)$). On pose $m_1 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ (le milieu de $[a_0, b_0]$).
Si $f(m_1) \leq z$, alors on garde le côté droit de l'intervalle, en posant :

$$a_1 = m_1, \qquad b_1 = b_0.$$

Si $f(m_1) > z$, alors on garde le côté gauche :

$$a_1 = a_0, \qquad b_1 = m_1.$$

On a ainsi les propriétés :

$$a_0 \leq a_1 \leq b_1 \leq b_0, \qquad b_1 - a_1 = \frac{1}{2}(b_0 - a_0), \qquad f(a_1) \leq z \leq f(b_1).$$

Et ainsi de suite : étant donnés des points

$$a = a_0 \leq \cdots \leq a_k \leq b_k \leq \cdots \leq b_0 = b,$$

vérifiant

$$\forall j \in [\![0,k]\!], \quad b_j - a_j = \frac{1}{2^j}(b_0 - a_0), \qquad f(a_j) \leq z \leq f(b_j),$$

on pose $m_{k+1} = \frac{1}{2}(a_k + b_k) \in [a,b] \subset I$.
Si $f(m_{k+1}) \leq y$, alors on pose $x_{k+1} = m_{k+1}$ et $y_{k+1} = y_k$.
Si $f(m_{k+1}) > z$, alors on pose $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = m_{k+1}$.
On a bien les propriétés :

$$a_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1} \leq b_k, \qquad f(a_{k+1}) \leq z \leq f(b_{k+1}), \qquad b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2}(b_k - a_k) = \frac{1}{2^{k+1}}(b_0 - a_0).$$

Ainsi, on a construit deux suites (a_n) et (b_n) adjacentes (car (a_n) est croissante, (b_n) décroissante et $b_n - a_n \to 0$), donc elles convergent vers une limite commune réelle, notée c, et on a $c \in [a,b]$ (par passage à la limite dans les inégalités larges $a \leq a_n \leq b_n \leq b$). Enfin, par passage à la limite dans les inégalités larges $f(a_n) \leq z \leq f(b_n)$ et par continuité de f en c, on a

$$f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leq z \leq \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c),$$

donc $f(c) = z$.

On dispose d'une réciproque du TVI pour les fonctions monotones :

Propriété 3 (Réciproque du TVI pour les fonctions monotones)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ monotone. **Si** *$f(I)$ est un intervalle,* **alors** *f est continue.*

Preuve
On suppose f croissante. Pour $a \in I$, on a $\lim\limits_{a^-} f \leq f(a) \leq \lim\limits_{a^+} f$ (mais seulement une des deux inégalités si a est une extrémité de I). Montrons que f est continue en a.

- $\boxed{\text{Si } f(a) < \lim\limits_{a^+} f}$ (ce qui sous-entend que a n'est pas l'extrémité droite de I) : fixons $x \in I$ tel que $x > a$ (on peut !). On a alors $f(a) < \lim\limits_{a^+} f \leq f(x)$, donc si on fixe $y \in]f(a); \lim\limits_{a^+} f[$, on a $y \in f(I)$ (puisque $f(a) \leq y \leq f(x)$ et $f(I)$ est un intervalle), donc $\exists t \in I$ tel que $y = f(t)$.
  Mais cela est impossible car :
  $$t \leq a \implies y = f(t) \leq f(a),$$
  $$t > a \implies y = f(t) \geq \lim_{a^+} f,$$
  donc on obtient une absurdité dans les deux cas, puisqu'on a supposé que $f(a) < y < \lim\limits_{a^+} f$.
- On montre de même que $\boxed{\lim\limits_{a^-} f < f(a)}$ conduit à une absurdité.
- Donc f est continue à gauche et à droite au point a : elle est donc continue en a.

Si f est décroissante, c'est pareil ($-f$ est croissante ...).

Remarque
Pas besoin que I soit un intervalle ici, $f(I)$ suffit.

ATTENTION !
Cette réciproque du TVI est fausse pour les fonctions non monotones.
Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ vérifie la "propriété de la valeur intermédiaire" (l'image de tout intervalle est un intervalle) tout en étant discontinue en 0 (exercice).

II Théorème de l'homéomorphisme

Définition 4 (Homéomorphisme)
Si A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$, on appelle **homéomorphisme** *de A sur B toute bijection $f : A \to B$ telle que f et f^{-1} sont des applications continues.*

De la section précédente, on déduit le théorème suivant :

Théorème 5 (Théorème de l'homéomorphisme)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ continue et strictement monotone.
Alors $J = f(I)$ est un intervalle, $f : I \to J$ est bijective et $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone, de même monotonie que f.

Remarque
Sous ces conditions, f est donc un homéomorphisme de I sur J.

Preuve

- On sait déjà que l'image $J = f(I)$ est un intervalle d'après le TVI, puisque I est un intervalle et f est continue.
- Vu que f est strictement monotone, elle est injective (par ex, si f est strictement croissante, on a $(x < y \implies f(x) < f(y))$ et $(x > y \implies f(x) > f(y))$, donc par disjonction de cas, $(x \neq y \implies f(x) \neq f(y))$). Donc $f : I \to J$ est bijective.
- La bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est aussi strictement monotone, de même monotonie que f. Par ex, si f est strictement croissante, alors pour tous $(u, v) \in J^2$:

$$u < v \iff f(f^{-1}(u)) < f(f^{-1}(v)) \iff f^{-1}(u) < f^{-1}(v),$$

donc f^{-1} est aussi strictement croissante.
- Vu que $f^{-1} : J \to I$ est monotone et que $f^{-1}(J) = I$ est un intervalle, on obtient d'après la réciproque du TVI pour les fonctions monotones que f^{-1} est continue.

ATTENTION !
Toute application strictement monotone est injective, mais la réciproque est fausse.
Par exemple, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est injective (et même bijective avec $f^{-1} = f$), mais pas strictement monotone.

En revanche, cette réciproque est vraie pour les fonctions continues :

Propriété 6 (Caractérisation de l'injectivité des fonctions continues)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue.
Alors f est injective ssi f est strictement monotone.

Preuve

- Le sens réciproque a déjà été traité (et il est vrai même si I n'est pas un intervalle).
- Sens direct : supposons donc $f : I \to \mathbb{R}$ continue et injective, et montrons sa stricte monotonie.
Par l'absurde, si f n'est pas strictement monotone, alors (quitte à changer f en $-f$), il existe trois points $a < b < c$ dans I tels que $f(a) \leq f(b)$ et $f(b) \geq f(c)$. Si l'une de ces inégalités n'est pas stricte, alors cela contredit l'injectivité de f. Donc $f(a) < f(b)$ et $f(b) > f(c)$.
Mais alors, on obtient par le TVI que la valeur

$$z = \frac{1}{2}\left(f(b) + max(f(a), f(c))\right),$$

qui vérifie $f(a) < z < f(b)$ et $f(c) < z < f(b)$, est atteinte au moins deux fois : une fois sur $]a, b[$ et une fois sur $]b, c[$ (qui sont disjoints), ce qui contredit encore l'injectivité de f.
Donc f est bien strictement monotone.

Remarque
Une bijection continue entre deux intervalles de $\mathbb{R}$ est donc nécessairement strictement monotone.
En particulier, un homéomorphisme entre deux intervalles de $\mathbb{R}$ est nécessairement strictement monotone.

III Bolzano-Weierstrass et bornes atteintes

Lemme 7 (Lemme d'extraction monotone)
De toute suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire une suite monotone.

Preuve
Considérer l'ensemble $X = \{n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n,\ u_p \geq u_n\}$.

- Si la partie $X \subset \mathbb{N}$ est infinie, alors il existe une bijection strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to X$ (poser $\varphi(0) = \min(X)$, puis $\varphi(1) = \min(X \setminus \{\varphi(0)\})$, $\varphi(2) = \min(X \setminus \{\varphi(0), \varphi(1)\})$, etc. Cette

application est strictement croissante par construction, donc injective, et surjective car pour tout $x \in X$, on a $x = \varphi(n)$ avec $n = Card\{p \in X,\ p < x\}$).
Dès lors, tous les entiers $\varphi(n)$ sont dans X, donc la suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ est croissante par définition de X.

- Si la partie X est finie, alors elle est majorée, donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(n \geq n_0 \implies n \notin X)$. Donc pour tout $n \geq n_0$, il existe $p \geq n$ tel que $u_p < u_n$.
On pose alors $\varphi(0) = n_0$, il existe $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $u_{\varphi(1)} < u_{\varphi(0)}$, et on construit par récurrence forte une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ strictement décroissante.

Théorème 8 (Bolzano-Weierstrass)
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée, alors on peut en extraire une suite convergente.

Preuve
Soit (u_n) une suite réelle bornée. D'après le lemme précédent, on peut en extraire une suite $(u_{\varphi(n)})$ monotone, qui est également bornée, donc convergente (si elle est croissante et majorée, elle converge vers sa borne supérieure, et si elle est décroissante et minorée, elle converge vers sa borne inférieure).

Remarque
On peut aussi démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass en utilisant le théorème des segments emboîtés, qui s'appuie sur le théorème de la limite monotone ("toute suite croissante et majorée converge vers sa borne supérieure").

Définition 9 (Segment)
On appelle **segment** *de $\mathbb{R}$ tout intervalle du type $[a, b]$ avec a, b réels et $a \leq b$.*

Théorème 10 (Théorème des bornes atteintes ("TBA"))
Toute fonction continue sur un segment $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes.

Preuve
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue avec $a \leq b$.
Montrons que f est majorée : si ce n'est pas le cas, alors

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in [a, b],\ f(x) > M.$$

Donc en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $f(x_n) > n$.
Ceci montre l'existence d'une suite (x_n) bornée telle que $f(x_n) > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $x^* \in [a, b]$.
Par continuité de f, on a $f(x_{\varphi(n)}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x^*)$, ce qui contredit le fait que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, vu l'inégalité vérifiée par les $f(x_n)$.
Ceci montre que f est majorée, et on prouve de même que f est minorée, donc f est bornée. Notons $M = \sup\limits_{[a,b]} f$ et $m = \inf\limits_{[a,b]} f$. Reste à montrer que m et M sont atteints sur $[a, b]$.
Par la caractérisation de la borne supérieure (et inférieure), il existe des suites $(y_n), (z_n)$ à valeurs dans $[a, b]$ telles que

$$f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m, \qquad f(z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} M.$$

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(y_{\varphi(n)})$ qui converge vers $y^* \in [a, b]$.
Donc par continuité de f :

$$f(y^*) = \lim_{n\to+\infty} f(y_{\varphi(n)}) = m,$$

donc la valeur m est atteinte, et de même pour la valeur M.

ATTENTION !
C'est bien entendu faux pour une fonction continue sur un intervalle quelconque !

Corollaire 11 (Image continue d'un segment)
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Preuve
Si $[a, b]$ est un segment, alors l'image $f([a, b])$ est un intervalle d'après le TVI (car f est continue), qui a pour extrémités m et M (avec les notations précédentes). On a donc $f([a, b]) = [m, M]$, puisque les deux valeurs extrêmales m et M sont dans l'image $f([a, b])$ (elles sont atteintes).